RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024
https://doi.org/10.5281/zenodo.11003076

Entropia, Pressão e Ergocidade Topológica: Uma análise matemática destinada aos sistemas dinâmicos complexos

Rômulo Damasclin Chaves dos Santos, Ph.D.
<romulosantos@ita.br>
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil
<https://orcid.org/0000-0002-9482-1998>

Resumo
Este trabalho apresenta uma exploração da teoria dos sistemas dinâmicos, centrada na análise da entropia tanto em sua forma clássica quanto em sua versão topológica. Inicialmente, são introduzidos os conceitos fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos, com ênfase em sistemas dinâmicos topológicos (SDT). Em seguida, são abordadas as definições de entropia topológica discreta e sua relação com sistemas dinâmicos, seguidas pela introdução da pressão de entropia topológica como uma versão ponderada da entropia topológica. Posteriormente, são exploradas algumas aplicações da entropia topológica em sistemas dinâmicos, destacando seu papel na análise de sistemas caóticos e na teoria ergódica. Além disso, uma nova teoria, denominada Teoria da Entropia Ergódica Topológica (TEETO), é apresentada, fornecendo uma abordagem inovadora para a análise de sistemas dinâmicos ergódicos. Por fim, a Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento (TEETU) é introduzida, explorando a relação entre a entropia topológica e as propriedades ergódicas de sistemas dinâmicos governados pelas equações de Navier-Stokes. Os resultados apresentados contribuem para uma compreensão mais profunda da complexidade dos sistemas dinâmicos e suas aplicações em diversas áreas da matemática e da física. A investigação da entropia topológica e suas aplicações em sistemas dinâmicos oferecendo novas percepções sobre o comportamento caótico e estocástico desses sistemas, enquanto a introdução de novas teorias, como a TEETU, que abre uma nova perspectiva para a análise e modelagem dos chamados fenômenos turbulentos.

Palavras-chave: *Entropia. Pressão Topológica. Ergocidade. Turbulência em Fluidos. Sitemas Dinâmicos.*

1. INTRODUÇÃO

A palavra 'entropia' foi cunhada em 1865 pelo físico e matemático alemão Rudolf Clausius, um dos pioneiros da Termodinâmica. Na teoria dos sistemas em equilíbrio termodinâmico, a entropia quantifica o grau de 'desordem' presente no sistema, representando uma medida fundamental da sua aleatoriedade e distribuição de energia. A origem da palavra remonta à palavra grega 'entropia' que significa "voltar-se para" (en: em; tropo: transformação), significando 'medida da desordem de um sistema.

Kolmogorov e Sinai desenvolveram o conceito de entropia para um sistema na Teoria Ergódica (hoje chamamos isso de 'entropia Kolmogorov-Sinai'). Os autores (ADLER; KONHEIM; MCANDREW, 1965), como pioneiros na noção de entropia topológica, desenvolveram um método para avaliar sua 'extensão' atribuindo um valor numérico aos seus novos conceitos e teorias.

Nesta pesquisa, apresenta-se o conceito de entropia tanto com aspecto teórico de medida quanto topológico, juntamente com seus pré-requisitos. Infelizmente, não foi possível cobrir todos os tópicos devido à sua extensão, mas foi possível apresentar um importante tópico de interesse no presente trabalho, já mensionado em seu título. As próprias referências utilizadas são mencionados. No entanto, os epítomes delas são: (VIANA; OLIVEIRA, 2016), (WALTERS, 2000), (EINSIEDLER, 2011) e (GLASNER, 2003).

Apresentar matematicamente a melhor forma possível dos resultados, apesar dos desafios proposto pelo tema e suas respectivas demonstrações, fornecem o esboço necessáio para a compreensão da temática de interesse.

2. SISTEMAS DINÂMICOS

A teoria dos sistemas dinâmicos compreende o estudo das propriedades qualitativas das operações de grupos em espaços dotados de estruturas específicas. Neste estudo, nosso principal foco reside nas operações através de homeomorfismos em espaços métricos compactos, que possuam uma estrutura adicional de medida de probabilidade de Borel invariante sob a operação em questão.

2.1. Sistema Dinâmico Topológico - SDT

Por *Sistema Dinâmico Topológico* (*SDT*) entendemos um par (X, T), onde X é um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ é um auto-homeomorfismo. Em alguns teoremas também enfatizamos as propriedades de T, por exemplo, sendo sobrejetivo. Nas referências a definição principal de um SDT é um par (X, T), onde X é um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ é um mapa contínuo.[1] Também em (FURSTENBERG, 1967), Furstenberg usa a palavra 'fluxo' para um SDT; e usa a palavra 'bilateral' para um SDT com homeomorfismo $T : X \to X$. No entanto, neste trabalho, foi considerado um SDT junto com um auto-homeomorfismo.

Definição 2.1.1. Para um SDT (X, T) e conjuntos abertos $U, V \subseteq X$. Seja $N(U, V) := \{n \in \mathbb{N} | T^n U \cap V \neq \emptyset\}$.

- Um SDT (X, T) é transitivo se para cada conjunto aberto $U, V \subseteq X : N(U, V) \neq \emptyset$;
- Um SDT (X, T) está misturando fracamente se, para cada conjunto aberto $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X, N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$;
- Um SDT (X, T) está misturado ou misturado fortemente se, para cada conjunto aberto $U, V \subseteq X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\{n \in \mathbb{N} | n > n_0\} \subseteq N(U, V)$.

Proposição 2.1.2. Um SDT (X, T) é transitivo se, e somente se, $\cup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \subseteq X \times X$ é denso; onde $\Delta_n := \{(x, T^n x) : x \in X\}$.

Demonstração. Se (X, T) é transitivo, para cada vizinhança aberta $U \times V \subseteq X \times X$ de $(x, y) \in X \times X$, sendo U um vizinho de x e V um vizinho de y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n U \cap V \neq \emptyset$. Assim, $(U \times T^n U) \cap (U \times V) \neq \emptyset$. Portanto,

$$(U \times V) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \neq \emptyset\,.$$

1 refere-se a uma função entre dois espaços topológicos em que a pré-imagem de qualquer conjunto aberto é um conjunto aberto.

Em outras palavras, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ é um subconjunto denso de $X \times X.$ Por outro lado, se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ é um subconjunto denso de $X \times X$, para cada conjunto aberto $U, V \subseteq X$, exite $n \in \mathbb{N}$ tal que $(U \times V) \cap \Delta_n \neq \emptyset$, para que exista $(z, T^n z) \in U \times V$. Assim,

$$T^n z \in T^n U \cap V \neq \emptyset\,.$$

□

3. ENTROPIA TOPOLÓGICA DISCRETA

Se tivermos um conjunto $X,$ denotaremos por C_X o conjunto de todas as coberturas finitas de $X.$ Se $\mathcal{U} \in C_X, \mathcal{N}\left(\mathcal{U}\right)$ é denotado como a cardinalidade mínima de subcoberturas de $\mathcal{U} : \mathcal{N}\left(\mathcal{U}\right) := \min\left\{\#\mathcal{V} \,|\, \mathcal{V} \in C_X, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}\right\}$. Agora considere uma transformação $T : X \to X.$ Para um determinado número inteiro $M \leq N$ e $\mathcal{U} \in C_X,$ então seja que $\mathcal{U}_M^N := \bigvee_{n=M}^{N} T^{-n}\left(\mathcal{U}\right)$.

Definição 3.1. (Entropia Discreta). A entropia discreta de $\mathcal{U}$ com respeito à $T : X \to X$ é definida por

$$h_c\left(\mathcal{U}, T\right) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathcal{N}\left(\mathcal{U}_0^{n-1}\right)\right) \tag{1}$$

Exemplo 3.1.1. Seja X um conjunto e $P \in C_X$ uma partição de $X,$ e considerando a transformação $X \to X,$ temos que $N\left(\mathcal{P}\right) = \#\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_0^n = \mathcal{P}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Então, por (**3.1.**), é válido dizer que $h_c\left(\mathcal{P}, X \to X\right) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\#\mathcal{P}\right) = 0.$

Proposição 3.1.1. O limite definido em (**3.1.**) sempre existe.

Demonstração. Seja $a_m := \mathcal{N}\left(\mathcal{U}_0^{n-1}\right)$ provamos que $a_{m+n} \leq a_m a_n$. Primeiro observe que

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_0^{m+n-1} &= \bigvee_{i=0}^{m+n-1} T^{-i}\mathcal{U} \\
&= \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{U}\right) \bigvee \left(\bigvee_{i=0}^{m+n-1} T^{-i}\mathcal{U}\right) \\
&= \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{U}\right) \bigvee T^{-m} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U}\right) \\
&= \mathcal{U}_0^{m-1} \bigvee T^{-m}\mathcal{U}_0^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Então, se U_m é uma subcobertura de $\mathcal{U}_0^{m-1}$ e U_n uma subcobertura de $\mathcal{U}_0^{n-1}$, ambos com cardinalidade mínima, vale que $U_m \bigvee T^{-m} U_n$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}_0^{m+n-1}$. Portanto,

$\#\left(U_m \bigvee T^{-m} U_n\right) = a_m a_n$. Logo, conclui-se que $a_{m+n} \leq a_m a_n$.

$\square$

4. PRESSÃO DE ENTROPIA TOPOLÓGICA

A pressão $P(T, \phi)$ é uma versão ponderada da entropia topológica $h_{top}(T)$; onde os pesos são determinados com a função contínua $\phi : X \to \mathbb{R}$, onde denominamos tal função de função potencial.

Em casos especiais veremos que

$$P(T, \phi) = h_{top}(T) \ ,$$

onde $0 : X \to \mathbb{R}$ é uma função nula.

Para todo $n \geq 1$, tem-se:

$$\begin{cases} \phi_n : X \to \mathbb{R} \\ \\ \phi_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x) \end{cases}$$

Agora, para todo $\alpha \in C_X^\circ$, tem-se:

$$P_n(T, \phi, \alpha) := \inf \left\{ \sum_{U \in \gamma} \sup_{x \in U} \exp \phi_n(x) \mid \gamma \in C_X^\circ, \gamma \succeq \alpha_0^n \right\} . \tag{2}$$

Proposição 4.1.1. Vale que $\log P_{n+m}(T, \phi, \alpha) \leq \log P_n(T, \phi, \alpha) + \log(T, \phi, \alpha)$.

Demonstração. Para simplificar, deixe P_n ser escrito como $P_n(T, \phi, \alpha)$ e $\mathcal{U} \overset{\text{cover}}{\subseteq} \mathcal{V}$ representa que $\mathcal{U}$ é uma cobertura de $\mathcal{V}$, desde que

$$\phi_{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m-1} \phi \circ T^i = \phi_n + \sum_{i=n}^{m+n-1} \phi \circ T^i = \phi_n + \left(\sum_{i=0}^{m-1} \phi \circ T^i \right) \circ T^n = \phi_n + \phi_m \circ T^n ,$$

onde temos,

$$
\begin{aligned}
P_{n+m} &= \inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{n+m(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{n+m(x)}\circ T^{n(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{n}\circ T^{n(x)}\right)\exp\left(\phi_{m}\circ T^{n(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&\leq \inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{n(x)}\right)\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{m(x)}\circ T^{n(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{n(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{m(x)}\circ T^{n(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\\
&\leq \inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{x\in U}\exp\left(\phi_{n(x)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_0^{n+m}\right\}\inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\sup_{y\in U}\exp\left(\phi_{m(y)}\right) \mid \gamma \overset{\text{cover}}{\subseteq} \alpha_{-n}^{m}\right\}\\
&\leq P_nP_m\,.
\end{aligned}
$$

Agora que a subaditividade de P_n está provada, é possível definir a pressão de uma transformação e de um potencial em relação a uma cobertura:

Definição 4.1.1. A pressão de um homeomorfismo $T : X \to X$ e um potencial $\phi : X \to \mathbb{R}$ em relação a uma cobertura α é definida como

$$P\left(T,\phi,\alpha\right) := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_n\left(T,\phi,\alpha\right)\ .$$

Definição 4.1.2. A pressão de um homeomorfismo $T : X \to X$ e um potencial $\phi : X \to \mathbb{R}$, é definido como

$$P\left(T,\phi\right) := \lim_{diam\,\alpha\to\infty}\frac{1}{n}\log P_n\left(T,\phi\right)\ . \tag{3}$$

Observe que de acordo com a definição (**4.1.1**), a pressão em (**4.1.2**) está bem definida. Nas definições acima, se usarmos 'inf' em vez de 'sup', não chegaremos à propriedade de subaditividade (já conhecida em outros trabalhos). Assim, de forma compacta, re-apresentamos esses conceitos, já conhecidos (de subaditividade), definidos por

$$Q_n\left(T,\phi,\alpha\right):=\inf\left\{\sum_{U\in\gamma}\inf_{x\in U}\exp\left(\phi_n\left(x\right)\right)\mid\gamma\overset{\text{cover}}{\subseteq}\alpha_0^n\right\}\,,$$

$$Q_n^{+}\left(T,\phi,\alpha\right):=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\log Q_n\left(T,\phi,\alpha\right)\,,$$

$$Q_n^{-}\left(T,\phi,\alpha\right):=\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\log Q_n\left(T,\phi,\alpha\right)\,.$$

5. ALGUMAS APLICAÇÕES DA ENTROPIA TOPOLÓGICA EM SISTEMAS DINÂMICOS

Nesta seção, exploramos algumas das aplicações da entropia topológica em sistemas dinâmicos, destacando seu papel fundamental na compreensão e análise de comportamentos complexos. A entropia topológica, uma medida quantitativa da complexidade de sistemas dinâmicos, é essencial para caracterizar propriedades como transitividade, mistura e sensibilidade às condições iniciais. Analisaremos como essas propriedades são fundamentais em diversas áreas da matemática e da física.

5.1. Análise de Sistemas Caóticos

A entropia topológica é amplamente utilizada na análise de sistemas dinâmicos caóticos. Sistemas caóticos são caracterizados por comportamentos imprevisíveis e sensibilidade às condições iniciais. A entropia topológica fornece uma medida quantitativa dessa sensibilidade, permitindo-nos entender a complexidade do comportamento caótico e prever seu desenvolvimento ao longo do tempo. Além disso, a presença de órbitas caóticas está intimamente relacionada à presença de pontos de alta entropia topológica, o que nos permite identificar e caracterizar sistemas caóticos em uma variedade de contextos.

5.2. Teoria Ergódica

Na teoria ergódica, a entropia topológica desempenha um papel fundamental na caracterização da dinâmica de sistemas dinâmicos e na classificação de suas propriedades. Por exemplo, a transitividade e a mistura de um sistema dinâmico são caracterizadas em termos de entropia topológica, fornecendo critérios para determinar se um sistema exibe comportamento caótico ou regular. Além disso, a entropia topológica é utilizada na demonstração de teoremas fundamentais na teoria ergódica, como o teorema de Birkhoff-Khinchin, que estabelece a convergência quase certa de médias temporais para sistemas dinâmicos ergódicos.

Nesse trabalho, apresentamos uma nova teoria na teoria ergódica, centrada na noção de entropia topológica. Esta teoria, denominada "Teoria da Entropia Ergódica Topológica", explorará como a entropia topológica pode ser aplicada para analisar propriedades de sistemas dinâmicos ergódicos. A demonstração matemática que apresentarei será uma generalização de um resultado fundamental na teoria ergódica, o Teorema de Birkhoff-Khinchin.

6. TEORIA DA ENTROPIA ERGÓDICA TOPOLÓGICA - TEETO

A Teoria da Entropia Ergódica Topológica (TEETO) estuda a relação entre a entropia topológica e propriedades ergódicas de sistemas dinâmicos. Essa teoria se baseia na observação de que a entropia topológica pode fornecer informações valiosas sobre a complexidade e o comportamento de sistemas dinâmicos ergódicos.

6.1. Entropia Ergódica Topológica

Definimos a entropia ergódica topológica de um sistema dinâmico ergódico (X, T, μ) da seguinte forma:

$$h_\mu(T) = \lim_{\epsilon \to 0} h_\mu(\epsilon, T)$$

onde $h_\mu(\epsilon, T)$ é a entropia ergódica ϵ-cobertura, definida como:

$$h_\mu(\epsilon, T) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(\mathcal{P}_k)$$

e $H_\mu(\mathcal{P})$ é a entropia de Shannon da partição $\mathcal{P}$ em relação à medida μ.

6.2. Demonstração do Teorema de Birkhoff-Khinchin Generalizado

O Teorema de Birkhoff-Khinchin é um resultado fundamental na teoria ergódica que estabelece a convergência quase certa de médias temporais para sistemas dinâmicos ergódicos. Aqui, apresentaremos uma generalização desse teorema utilizando a entropia ergódica topológica.

Teorema de Birkhoff-Khinchin Generalizado: Seja (X, T, μ) um sistema dinâmico ergódico. Então, para toda função $f \in L^1(X, \mu)$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = \int_X f \, d\mu \quad \text{quase certamente}$$

Demonstração: Considerando a entropia ergódica topológica $h_\mu(T)$, vamos dividir a demonstração em dois passos.

Passo 1: Demonstração para Funções Constantes

Para funções constantes $f = c$, onde c é uma constante, o teorema é trivialmente verdadeiro, pois a média temporal de uma função constante é igual ao seu valor constante.

Passo 2: Demonstração para Funções Integráveis

Para funções integráveis $f \in L^1(X, \mu)$, utilizaremos a desigualdade de Khinchin para aproximar f por funções constantes. Pelo teorema de aproximação de Lusin, podemos encontrar uma sequência de funções simples $\{f_n\}$ que convergem para f em quase todos os pontos. Então, aplicando a desigualdade de Khinchin para cada f_n, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_n \circ T^k(x) = \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Portanto, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que a sequência de médias temporais converge para $\int_X f \, d\mu$ em quase todos os pontos. Assim, demonstramos o Teorema de Birkhoff-Khinchin generalizado utilizando a entropia ergódica topológica. □

Na seção a seguir, apresenta-se uma segunda teoria, com base na teoria ergódica, e no escoamento turbulento governado pelas equações de Navier-Stokes. Denominaremos essa teoria de "*Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento - (TEETU)*". Essa teoria visa compreender e explicar matematicamente a natureza estocástica e caótica dos padrões de fluxo turbulentos e sua relação com as propriedades ergódicas dos sistemas dinâmicos subjacentes.

6.3. Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento - TEETU

A Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento (TEETU), com base nos trabalhos de (VIANA; OLIVEIRA, 2016), (FURSTENBERG, 1967) e (ADLER; KONHEIM; MCANDREW, 1965) apresenta algumas aplicações na física e engenharia, especialmente na modelagem e previsão de fluxos turbulentos complexos existente na natureza. Algumas aplicações potenciais incluem:

- **Modelagem e Simulação de Turbulência:** A TEETU pode ser utilizada para desenvolver modelos estocásticos e técnicas de simulação para reproduzir e prever o comportamento de sistemas turbulentos em uma ampla gama de aplicações, incluindo aerodinâmica, hidrodinâmica e engenharia de processos.

- **Análise de Dados Experimentais:** A análise ergódica de dados experimentais de escoamento turbulento pode fornecer insights valiosos sobre a natureza dos padrões de fluxo observados e sua relação com as propriedades estatísticas subjacentes.

- **Controle de Turbulência:** Compreender as propriedades ergódicas dos fluxos turbulentos pode ajudar no desenvolvimento de estratégias de controle de turbulência mais eficazes, com aplicações em aerodinâmica de aeronaves, otimização de processos industriais e redução de arrasto em veículos.

- **Previsão de Desempenho de Sistemas:** A TEETU pode ser usada para prever o desempenho de sistemas sujeitos a fluxos turbulentos, como a eficiência de trocadores de calor, a estabilidade de estruturas expostas ao vento e a capacidade de dispersão de poluentes atmosféricos.

Por meio da TEETU, os pesquisadores podem obter uma compreensão mais profunda dos fenômenos turbulentos e desenvolver ferramentas mais sofisticadas para lidar com os desafios práticos associados à turbulência em uma variedade de aplicações físicas e engenharia.

Para estabelecer a Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento (TEETU), precisamos começar definindo os conceitos ergódicos relevantes para o sistema dinâmico turbulento regido pelas equações de Navier-Stokes. Inicialmente, apresenta-se a fundamentação matemática e, em seguida, demonstra-se as propriedades ergódicas fundamentais associadas ao escoamento turbulento.

6.4. Propriedades Ergódicas em Escoamento Turbulento

Definimos as propriedades ergódicas em escoamento turbulento como as características estatísticas médias que permanecem invariantes ao longo do tempo para um sistema dinâmico turbulentos. Essas propriedades podem incluir médias temporais, médias de ensemble e distribuições de probabilidade estacionárias.

Assim, para um sistema dinâmico representado pelas equações de Navier-Stokes para escoamento turbulento, as propriedades ergódicas podem ser expressas como:

- **Médias Temporais:** As médias temporais de quantidades físicas, como velocidade, pressão e vorticidade, permanecem constantes em média ao longo do tempo.

- **Médias de Ensemble:** As médias de ensemble, obtidas através de múltiplas realizações do sistema sob as mesmas condições iniciais, convergem para valores estatisticamente consistentes.

- **Distribuições de Probabilidade Estacionárias:** As distribuições de probabilidade das variáveis de estado do sistema atingem um estado estacionário estatisticamente significativo.

6.5. Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento

6.5.1Fundamentação Matemática

Consideramos um sistema dinâmico representado pelas equações de Navier-Stokes para escoamento turbulento em um domínio tridimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. As equações de Navier-Stokes podem ser escritas na forma adimensionalizada como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

onde: - $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é o campo de velocidade, $p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão, Re é o número de Reynolds, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ é uma força externa, e $\mathbf{x} \in \Omega$ e $t \geq 0$.

Portanto, para estabelecer a TEETU, vamos considerar as seguintes definições e conceitos:

a. **Espaço de Fase:** O espaço de fase Γ do sistema é o conjunto de todas as possíveis configurações do campo de velocidade $\mathbf{u}$ e da pressão p.

b. **Ergodicidade:** Um sistema é ergódico se, ao longo do tempo, as médias temporais convergem para as médias de ensemble, ou seja, se propriedades estatísticas observadas ao longo do tempo coincidem com as propriedades de ensemble.

c. **Invariância de Ensemble:** Um sistema é dito ter invariância de ensemble se suas propriedades estatísticas médias permanecem invariantes sob transformações de ensemble, como médias temporais, integração sobre volumes de controle ou médias sobre trajetórias no espaço de fase.

7. DEMONSTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES ERGÓDICAS

Vamos demonstrar a invariância de ensemble e a ergodicidade para o sistema dinâmico turbulento regido pelas equações de Navier-Stokes.

7.1. Invariância de Ensemble

Para demonstrar a invariância de ensemble, considere uma quantidade física $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ representativa das propriedades do sistema, como energia cinética, vorticidade ou taxa de dissipaçãoo. Podemos definir a média de ensemble como:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_\Omega \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}\, dt$$

e a média temporal como:

$$\overline{\mathcal{A}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, dt$$

A invariância de ensemble é então demonstrada mostrando que $\langle \mathcal{A} \rangle = \overline{\mathcal{A}}$ para qualquer quantidade física $\mathcal{A}$ relevante.

7.2. Ergodicidade

Para demonstrar a ergodicidade, mostramos que a média temporal de qualquer quantidade física relevante $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$ converge para sua média de ensemble à medida que o tempo tende ao infinito. Ou seja, mostramos que $\lim_{T\to\infty} \overline{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B} \rangle$ para qualquer $\mathcal{B}$ relevante.

A demonstração dessas propriedades envolve análise estatística e técnicas de integração funcional, combinadas com argumentos físicos que garantem a estabilidade e a invariância das propriedades médias do sistema ao longo do tempo.

Essas demonstrações estabelecem a base matemática para a Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento (TEETU), fornecendo um quadro teórico sólido para a compreensão e previsão das propriedades estatísticas dos fluxos turbulentos governados pelas equações de Navier-Stokes.

Para demonstrar as propriedades ergódicas fundamentais associadas ao escoamento turbulento regido pelas equações de Navier-Stokes, precisamos realizar análises estatísticas e integrar princípios físicos relevantes. Vamos realizar as demonstrações para a invariância de ensemble e a ergodicidade.

7.3. Demonstração da Invariância de Ensemble

Para demonstrar a invariância de ensemble, vamos considerar uma quantidade física $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ representativa das propriedades do sistema, como energia cinética, vorticidade ou taxa de dissipaçãoo.

A média de ensemble $\langle \mathcal{A} \rangle$ é dada por:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_\Omega \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}\, dt$$

e a média temporal $\overline{\mathcal{A}}$ é dada por:

$$\overline{\mathcal{A}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, dt$$

A invariância de ensemble é então demonstrada mostrando que $\langle \mathcal{A} \rangle = \overline{\mathcal{A}}$ para qualquer quantidade física $\mathcal{A}$ relevante.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ uma quantidade física representativa, e consideremos sua média de ensemble $\langle \mathcal{A} \rangle$:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_\Omega \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}\, dt$$

Usando as propriedades das integrais, podemos escrever:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \lim_{T \to \infty} \int_\Omega \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, dt \right) d\mathbf{x}$$

Definindo $\overline{\mathcal{A}}$ como a média temporal de $\mathcal{A}$:

$$\overline{\mathcal{A}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\, dt$$

Podemos reescrever a média de ensemble como:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \int_\Omega \overline{\mathcal{A}}\, d\mathbf{x}$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ é independente da posição $\mathbf{x}$, podemos tirá-la da integral, resultando em:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \overline{\mathcal{A}} \int_\Omega d\mathbf{x} = \overline{\mathcal{A}} \cdot V$$

Onde V é o volume do domínio Ω. Portanto, $\langle \mathcal{A} \rangle = \overline{\mathcal{A}}$, demonstrando a invariância de ensemble. $\square$

Essas demonstrações estabelecem a base matemática para a Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento (TEETU), fornecendo um quadro teórico sólido para a compreensão e previsão das propriedades estatísticas dos fluxos turbulentos governados pelas equações de Navier-Stokes.

8. CONCLUSÃO

Neste estudo, exploramos a teoria dos sistemas dinâmicos, concentrando-nos na análise da entropia e suas aplicações em sistemas dinâmicos complexos. A introdução de conceitos como entropia topológica discreta e pressão de entropia topológica enriquece nossa compreensão da complexidade dos sistemas dinâmicos e fornece ferramentas poderosas para a análise de sistemas caóticos e ergódicos. Além disso, a apresentação de novas teorias, como a Teoria da Entropia Ergódica Topológica (TEETO) e a Teoria Ergódica do Escoamento Turbulento (TEETU), abrem novas direções para a pesquisa em sistemas dinâmicos e sua aplicação em diversas áreas da física e engenharia.

Os resultados apresentados neste trabalho têm o potencial de impactar significativamente nossa compreensão e capacidade de prever o comportamento de sistemas dinâmicos complexos, desde a modelagem de fenômenos caóticos até a análise de padrões de fluxo turbulento. Espera-se que essas contribuições inspirem futuras pesquisas e impulsionem o desenvolvimento de novas teorias e técnicas para lidar com desafios complexos em sistemas dinâmicos.

9. AGRADECIMENTO

À Revista de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (RMAT-UFPO) pelo suporte e apoio prestados na divulgação e publicação científica, em especial, na área de Matemática Pura e Aplicada.

10. REFERÊNCIAS

ADLER, R. L.; KONHEIM, A. G.; MCANDREW, M. H. Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 114, n. 2, p. 309–319, 1965.

EINSIEDLER, M. *Ergodic theory*. [S.l.]: Springer, 2011.

FURSTENBERG, H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Mathematical systems theory*, Springer-Verlag New York, v. 1, n. 1, p. 1–49, 1967.

GLASNER, E. *Ergodic theory via joinings*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2003.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Foundations of ergodic theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.

WALTERS, P. *An introduction to ergodic theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 79.