RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024
https://doi.org/10.5281/zenodo.11199761
Recebido: 25/04/2024
Publicado: 15/05/2024

Sequência de Hexa-Leonardo: uma extensão da sequência de Leonardo

Milena Carolina dos Santos Mangueira
<milenacarolina24@gmail.com>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará , Fortaleza, CE, Brasil
<https://orcid.org/0000-0002-4446-155X>

Francisco Regis Vieira Alves
<fregis@ifce.edu.br>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará , Fortaleza, CE, Brasil
<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

Paula Maria Machado Cruz Catarino
<pcatarino23@gmail.com>
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, VRL, Portugal
<https://orcid.org/0000-0001-6917-5093>

Resumo
A presente pesquisa tem como objetivo aprofundar a investigação da sequência de Leonardo, introduzindo a sexta ordem da sequência de Hexa-Leonardo. Neste contexto, exploramos teoremas e definições matemáticas, possivelmente inovadores, com o propósito de avançar no conhecimento desses números, como evidenciado pelos resultados apresentados neste estudo. Além disso, para futuras pesquisas, almejamos a generalização da sequência de Leonardo, expandindo, assim, as fronteiras do conhecimento matemático nesse campo.

Palavras-chave: *Extensão. Forma matricial. Função gerador. Sequência de Leonardo.*

1. INTRODUÇÃO

A sequência de Leonardo é uma sequência numérica e recorrente, possuindo a relação de recorrência dada por: $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2$, com os valores iniciais $Le_0 = Le_1 = 1$ (ALP; KOÇER, 2021a; ALP; KOÇER, 2021b; SHANNON, 2019; VIEIRA et al., 2020b; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019). Os números de Leonardo são uma sequência numérica que segue uma relação de recorrência específica. Essa sequência é semelhante à sequência de Fibonacci, mas com uma pequena variação na relação de recorrência.

Isso significa que, a partir do terceiro termo (Le_2), cada número na sequência é obtido somando os dois termos anteriores (Le_{n-1} e Le_{n-2}) e, em seguida, adicionando 1. Portanto, os primeiros termos da sequência seriam:

$$
\begin{aligned}
&Le_0 = 1\\
&Le_1 = 1\\
&Le_2 = Le_1 + Le_0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3\\
&Le_3 = Le_2 + Le_1 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5\\
&Le_4 = Le_3 + Le_2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 9
\end{aligned}
$$

E assim por diante.

Os números de Leonardo são uma sequência interessante de explorar em matemática e têm várias propriedades e padrões matemáticos associados a eles (ALP; KOÇER, 2021a; ALP; KOÇER, 2021b).

Recentemente, Catarino e Borges (CATARINO; BORGES, 2019) realizaram uma alteração na recorrência da sequência de Leonardo obtendo a seguinte recorrência equivalente

$$Le_{n+1} \;=\; 2Le_n - Le_{n-2} \tag{1}$$

sendo $Le_0 = Le_1 = 1, Le_2 = 3$ suas condições iniciais.

Feinberg (FEINBERG, 1963), por sua vez, conduziu um estudo abordando a extensão dos números de Fibonacci, explorando a sequência de Tribonacci. Portanto, neste trabalho, realizamos uma extensão da sequência de Fibonacci, expandindo a ordem desses números e investigando suas propriedades matemáticas.

Esta expansão da sequência de Leonardo, que deu origem à sequência de Hexa-Leonardo, contribui para um maior entendimento das propriedades matemáticas subjacentes a esses números. Além disso, permite explorar novas possibilidades e relações entre essas sequências numéricas, o que é fundamental no contexto da matemática pura e aplicada. O estudo dessa sequência pode ter várias aplicações em campos como ciência da computação, teoria dos números, combinatória e muito mais. Portanto, a pesquisa relacionada a essa extensão da sequência de Leonardo é valiosa e continua a enriquecer o campo da matemática.

2. HEXA-LEONARDO

A sequência Hexa-Leonardo é uma extensão que possui a relação de recorrência de sexta ordem e é dada pela recorrência:

Definiçao 1. *A recorrência dos números de Hexa-Leonardo é dada por:*

$$Le^6_n = Le^6_{n-1} + Le^6_{n-2} + Le^6_{n-3} + Le^6_{n-4} + Le^6_{n-5} + 1, n \geq 5,$$

com os valores iniciais $Le^6_0 = Le^6_1 = 1$, $Le^6_2 = 3$, $Le^6_3 = 5$ e $Le^6_4 = 9$. E ainda, realizando as operações de $Le^6_n - Le^6_{n+1}$, obtemos a relação de recorrência homogênea dada por:

$$Le^6_n = 2Le^6_{n-1} - Le^6_{n-6}, n \geq 6.$$

Assim, os primeiros termos da sequência são descritos na Tabela 1:

TABELA 1.
Primeiros termos da sequência Hexa-Leonardo.

Le_0^6	Le_1^6	Le_2^6	Le_3^6	Le_4^6	Le_5^6	Le_6^6	Le_7^6
1	1	3	5	9	20	39	77

Com base nas pesquisas realizadas por (VIEIRA et al., 2020b; VIEIRA et al., 2020a) nas quais é apresentado a construção da forma matricial para sequências lineares e recorrentes, é possível estabelecer um teorema relacionado à representação em forma matricial da sequência Hexa-Leonardo. Importante destacar que essa matriz consiste na adição de um vetor contendo os seus respectivos valores iniciais. É necessário ainda, definir uma outra matriz, que será multiplicada ao vetor, levando em consideração a matriz estudada nos trabalhos de (SEENUKUL, 2015; SOKHUMA, 2013).

Teorema 2. *Se*

$$\begin{aligned} Q_6 = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} Le_6^6 & Le_5^6 & Le_4^6 & Le_3^6 & Le_2^6 & Le_1^6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

então a forma matricial dos números de Hexa-Leonardo é dada por

$$\begin{aligned} Q_6^n = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \\ = \begin{bmatrix} Le_{n+5}^6 & Le_{n+4}^6 & Le_{n+3}^6 & Le_{n+2}^6 & Le_{n+1}^6 & Le_n^6 \end{bmatrix}, n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, temos que: Para $n = 1$ a igualdade é válida, pois

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} Le_6^6 & Le_5^6 & Le_4^6 & Le_3^6 & Le_2^6 & Le_1^6 \end{bmatrix}$$

Supondo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$Q_6^k = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$
$$= \begin{bmatrix} Le_{k+5}^6 & Le_{k+4}^6 & Le_{k+3}^6 & Le_{k+2}^6 & Le_{k+1}^6 & Le_k^6 \end{bmatrix}$$

Assim, a igualdade também será válida para $n = k + 1$. De fato,

$$Q_6^{k+1} = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Le_{k+5}^6 & Le_{k+4}^6 & Le_{k+3}^6 & Le_{k+2}^6 & Le_{k+1}^6 & Le_k^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2Le_{k+5}^6 - Le_k^6 & Le_{k+5}^6 & Le_{k+4}^6 & Le_{k+3}^6 & Le_{k+2}^6 & Le_{k+1}^6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} Le_{k+6}^6 & Le_{k+5}^6 & Le_{k+4}^6 & Le_{k+3}^6 & Le_{k+2}^6 & Le_{k+1}^6 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática temos que a igualdade é válida para todo natural $n \geq 1$. □

Teorema 3. *Para os números de Hexa-Leonardo, o polinômio característico é dado por:*

$$p(x) = x^6 - 2x^5 + 1.$$

onde é uma equação de sexto grau possuindo seis raízes.

Demonstração. Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Hexa-Leonardo é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = det(\lambda I - Q_6),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e a matriz base da sequência de Tetra-Leonardo, dada por: $Q_6 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim,

$$\lambda I - Q_6 = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

E ainda,

$$det(\lambda I - Q_6) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 - 2\lambda^5 + 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^6 - 2\lambda^5 + 1 = 0$. Portanto, $p(x) = x^6 - 2x^5 + 1$. □

Teorema 4. *Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência Hexa-Leonardo é dada por:*

$$Le_n^6 = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n + E(x_5)^n + F(x_6)^n,$$

sendo x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 as raízes do polinômio caracteristído da sequência Hexa-Leonardo ($x^6 - 2x^5 + 1 = 0$) e A, B, C, D, E e F são os coeficientes da fórmula de Binet.

Demonstração. Para demonstrar a fórmula de Binet da sequência Hexa-Leonardo é necessário calcular o determinante baseado no trabalho de (ANDRADE; FACINI, 2018). Este discriminante deverá ser maior que zero para que a fórmula de Binet exista.

Assim, tem-se que:

$$M = (-1)^{\frac{1}{2}6(6-1)} det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{\frac{1}{2}6(6-1)} \cdot det(M) \\ \Delta &= (-1)^{15} \cdot (-153344) \\ \Delta &= 153344. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $\Delta > 0$, tem-se que as raízes são distintas. □

Teorema 5. *Assim como na Proposição 5.1 de Catarino e Borges (CATARINO; BORGES, 2019) podemos definir a função geradora dos números de Hexa-Leonardo por*

$$G_{Le_n^6}(x) = \frac{1 - x + x^2 - x^3 - x^4 + 2x^5}{1 - 2x + x^6}.$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número de Hexa-Leonardo vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{Le_n^6}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Le_n^6 x^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$
\begin{aligned}
G_{Le_n^6}(x) &= Le_0^6 + Le_1^6 x + Le_2^6 x^2 + Le_3^6 x^3 + Le_4^6 x^4 + Le_5^6 x^5 + \sum_{n=6}^{\infty} Le_n^6 x^n \\
&= Le_0^6 + Le_1^6 x + Le_2^6 x^2 + Le_3^6 x^3 + Le_4^6 x^4 + Le_5^6 x^5 + \sum_{n=6}^{\infty} (2Le_{n-1}^6 - Le_{n-6}^6) x^n \\
&= Le_0^6 + Le_1^6 x + Le_2^6 x^2 + Le_3^6 x^3 + Le_4^6 x^4 + Le_5^6 x^5 + 2x \sum_{n=6}^{\infty} Le_{n-1}^6 x^{n-1} - \\
&\quad x^6 \sum_{n=6}^{\infty} Le_{n-6}^6 x^{n-6} \\
&= Le_0^6 + Le_1^6 x + Le_2^6 x^2 + Le_3^6 x^3 + Le_4^6 x^4 + Le_5^6 x^5 + \\
&\quad 2x \sum_{n=0}^{\infty} (Le_n^6 x^n - Le_0^6 - Le_1^6 x - Le_2^6 x^2 - Le_3^5 x^3 - Le_4^5 x^4) - x^6 \sum_{n=0}^{\infty} Le_n^6 x^n \\
&= 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 9x^4 + 20x^5 + 2x \sum_{n=0}^{\infty} (Le_n^6 x^n - 1 - x - 3x^2 - 5x^3 - 9x^4) - \\
&\quad x^6 \sum_{n=0}^{\infty} Le_n^6 x^n \\
&= 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 9x^4 + 20x^5 - 2x - 2x^2 - 6x^3 - 10x^4 - 18x^5 + \\
&\quad 2x G_{Le_n^6} - x^6 G_{Le_n^6}
\end{aligned}
$$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
G_{Le_n^6}(x) - 2x G_{Le_n^6} + x^6 G_{Le_n^6} &= 1 - x + x^2 - x^3 - x^4 + 2x^5 \\
G_{Le_n^6}(x)(1 - 2x + x^6) &= 1 - x + x^2 - x^3 - x^4 + 2x^5 \\
G_{Le_n^6}(x) &= \frac{1 - x + x^2 - x^3 - x^4 + 2x^5}{1 - 2x + x^6}
\end{aligned}
$$

□

Logo abaixo é mostrada na Figura 1 o *software* Maxima para os números de Hexa-Leonardo.

E ainda, tem-se a recorrência da sequência de Hexa-Leonardo para índices inteiros não positivo.

Definiçao 6. *Para $n > 0$, tem-se a fórmula de recorrência da sequência de Hexa-Leonardo.*

$$Le_{-n}^6 = 2Le_{-n+5}^6 - Le_{-n+6}^6.$$

Assim, é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo de Hexa-Leonardo de acordo com a Tabela 2 abaixo:

Com índice inteiro não positivo, a sequência de Tetra-Leonardo, será nomeada a matriz geradora de ϱ_6 obtida através do cálculo da matriz inversa de Q_6.

Figura 1. Desenvolvimento da Função Geradora de Hexa-Leonardo para os termos positivos.

```
(%i54) ((1-x+x^2-x^3-x^4+2·x^5)/(x^6-2·x+1));
       taylor((1-x+x^2-x^3-x^4+2·x^5)/(x^6-2·x+1),x,0,70);
```

(%o53) $$\frac{2x^5-x^4-x^3+x^2-x+1}{x^6-2x+1}$$

(%o54)/T/ $$1+x+3x^2+5x^3+9x^4+20x^5+39x^6+77x^7+151x^8+297x^9+585x^{10}+1150x^{11}+2261x^{12}+4445x^{13}+8739x^{14}+17181x^{15}+33777x^{16}+66404x^{17}+130547x^{18}+256649x^{19}+504559x^{20}+991937x^{21}+1950097x^{22}+3833790x^{23}+7537033x^{24}+14817417x^{25}+29130275x^{26}+57268613x^{27}+112587129x^{28}+221340468x^{29}+435143903x^{30}+855470389x^{31}+1681810503x^{32}+3306352393x^{33}+6500117657x^{34}+12778894846x^{35}+25122645789x^{36}+49389821189x^{37}+97097831875x^{38}+190889311357x^{39}+375278505057x^{40}+737778115268x^{41}+1450433584747x^{42}+2851477348305x^{43}+5605856864735x^{44}+11020824418113x^{45}+21666370331169x^{46}+42594962547070x^{47}+83739491509393x^{48}+164627505670481x^{49}+323649154476227x^{50}+636277484534341x^{51}+1250888598737513x^{52}+2459182234927956x^{53}+4834624978346519x^{54}+9504622451022557x^{55}+18685595747568887x^{56}+36734914010603433x^{57}+72218939422469353x^{58}+141978696610010750x^{59}+279122768241674981x^{60}+548740914032327405x^{61}+1078796232317085923x^{62}+2120857550623568413x^{63}+4169496161824667473x^{64}+8197013627039324196x^{65}+16114904485836973411x^{66}+31681068057641619417x^{67}+62283339882966152911x^{68}+122445822215308737409x^{69}+240722148268792807345x^{70}+\ldots$$

TABELA 2.
Termos da sequência de Hexa-Leonardo - índice inteiro não positivo.

Le^6_{-1}	Le^6_{-2}	Le^6_{-3}	Le^6_{-4}	Le^6_{-5}	Le^6_{-6}
-2	1	1	-1	1	-5

Teorema 7. *Se* $\varrho_6 = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} Le^6_4 & Le^6_3 & Le^6_2 & Le^6_1 & Le^6_0 & Le^6_{-1} \end{bmatrix}$,

então a forma matricial dos números de Hexa-Leandro, para o campo dos inteiros não positivos, é dada por

$$\varrho_6^n = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$
$$= \begin{bmatrix} Le^6_{-n+5} & Le^6_{-n+4} & Le^6_{-n+3} & Le^6_{-n+2} & Le^6_{-n+1} & Le^6_{-n} \end{bmatrix}, n \geqslant 1.$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, temos que:

Para $n = 1$ a igualdade é válida, pois

$$\varrho_6 = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} Le^6_4 & Le^6_3 & Le^6_2 & Le^6_1 & Le^6_0 & Le^6_{-1} \end{bmatrix}$$

Supondo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\varrho_6^k = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k$$
$$= \begin{bmatrix} Le^6_{-k+5} & Le^6_{-k+4} & Le^6_{-k+3} & Le^6_{-k+2} & Le^6_{-k+1} & Le^6_{-k} \end{bmatrix}$$

Assim a igualdade também será válida para $n = k + 1$. De fato,

$$\varrho_6^{k+1} = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Le^6_{-k+5} & Le^6_{-k+4} & Le^6_{-k+3} & Le^6_{-k+2} & Le^6_{-k+1} & Le^6_{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Le^6_{-k+4} & Le^6_{-k+3} & Le^6_{-k+2} & Le^6_{-k+1} & Le^6_{-k} & -Le^6_{-k+5} + 2Le^6_{-k+4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Le^6_{-k+4} & Le^6_{-k+3} & Le^6_{-k+2} & Le^6_{-k+1} & Le^6_{-k} & Le^6_{-k-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática temos que a igualdade é válida para todo natural $n \geq 1$. $\square$

3. CONCLUSÃO

A pesquisa apresentou uma extensão da sequência de Leonardo, dando origem a uma nova sequência denominada por sequência Hexa-Leonardo. Dessa maneira, foram investigados os aspectos matemáticos envolvidos, destacando a relação de recorrência, a fórmula de Binet, a função geradora e a representação em forma matricial dos números Hexa-Leonardo, bem como sua generalização para números inteiros não positivos, também expressos em forma matricial.

Por último, é importante ressaltar o potencial de aplicação destes números em projetos futuros, assim como a sua utilização em diferentes contextos e apresentar sua forma de representação visual.

4. AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/-CED/00194/2020.

5. REFERÊNCIAS

ALP, Y.; KOÇER, E. G. Some properties of Leonardo numbers. **Konuralp Journal of Mathematics**, Mehmet Zeki SARIKAYA, v. 9, n. 1, p. 183–189, 2021a.

ALP, Y.; KOÇER, E. G. Hybrid Leonardo numbers. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 150, p. 111–128, 2021b.

ANDRADE, A. A. d.; FACINI, L. S. Discriminante de polinômios e aplicações. XXX Semana da Matemática, IBILCE-UNESP, 2018.

CATARINO, P. M.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75–86, 2019.

FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quarterly**, v. 1, n. 1, p. 71–74, 1963.

GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. d. O teorema de Cayley-Hamilton. **IME-USP Oswaldo Rio Branco de Oliveira**, p. 1–11, 2019.

SEENUKUL, P. Matrices which have similar properties to Padovan-matrix and its generalized relations. **Creative Science**, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.

SHANNON, A. A note on generalized Leonardo numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97–101, 2019.

SOKHUMA, K. Matrices formula for Padovan and Perrin sequences. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 142, p. 7093–7096, 2013.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156–173, 2019.

VIEIRA, R. P. M. et al. Construção da forma matricial de sequências lineares e recorrentes: um estudo da matriz geradora. **Cadernos do IME-Série Matemática**, n. 15, p. 167–180, 2020.

VIEIRA, R. P. M. et al. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e natura**, v. 42, p. e100–e100, 2020.