

# A relação entre os grupos dos quaternions e o grupo de Lie $SU(2)$ : uma perspectiva a partir da visualização via software GeoGebra

*The relationship between the quaternion groups and the  $SU(2)$  Lie group: a perspective from  
visualization via GeoGebra software*

*La relación entre los grupos de cuaterniones y el grupo de Lie  $SU(2)$ : una perspectiva desde la  
visualización a través del software GeoGebra*

**Renata Teófilo de Sousa**

<rtsnaty@gmail.com>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil



<<https://orcid.org/0000-0001-5507-2691>>

**Milena Carolina dos Santos Mangueira**

<milenacarolina24@gmail.com>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil



<<https://orcid.org/0000-0002-4446-155X>>

**Francisco Regis Vieira Alves**

<fregis@ifce.edu.br>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil



<<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>>

## Resumo

*Este artigo trata-se de uma pesquisa de doutorado em andamento, em que apresentamos um estudo sobre os quaternions e suas propriedades algébricas, bem como as possibilidades de seu estudo enquanto estrutura algébrica de grupo com o aporte do software GeoGebra. Os quaternions são uma extensão dos números complexos e podem ser associados a certos grupos finitos, como o grupo especial unitário dos quaternions, que é uma estrutura algébrica também conhecida como grupo de Lie  $SU(2)$ . Por sua complexidade no que tange à abstração de sua estrutura, buscamos apresentar uma possibilidade de exploração visual no campo 3D, como aporte à compreensão de suas propriedades, visando subsidiar sua discussão no âmbito da licenciatura em matemática.*

**Palavras-chave:** Quaternions. Grupo Especial Unitário. GeoGebra. Visualização.

## Abstract

*This article is part of an ongoing doctoral research project, in which we present a study on quaternions and their algebraic properties, as well as the possibilities of studying them as an algebraic group structure with the support of GeoGebra software. Quaternions are an extension of complex numbers and can be associated with certain finite groups, such as the special unitary quaternion group, which is an algebraic structure also known as the Lie group  $SU(2)$ . Due to the complexity regarding the abstraction of its structure, we aim to present a possibility of visual exploration in the 3D field, as an aid to understanding its properties, intending to support its discussion within the scope of a mathematics teaching degree.*

**Keywords:** Quaternions. Special Unitary Group. GeoGebra. Visualization.

37 **Resumen**

38 *Este artículo se trata de una investigación de doctorado en curso, en la que presentamos un estudio sobre los*  
 39 *cuaterniones y sus propiedades algebraicas, así como las posibilidades de su estudio como estructura algebraica*  
 40 *de grupo con la ayuda del software GeoGebra. Los cuaterniones son una extensión de los números complejos y*  
 41 *pueden asociarse a ciertos grupos finitos, como el grupo especial unitario de los cuaterniones, que es una estructura*  
 42 *algebraica también conocida como grupo de Lie  $SU(2)$ . Debido a su complejidad en lo que respecta a la abstracción*  
 43 *de su estructura, buscamos presentar una posibilidad de exploración visual en el campo 3D, como apoyo para*  
 44 *la comprensión de sus propiedades, con el objetivo de respaldar su discusión en el ámbito de la licenciatura en*  
 45 *matemáticas.*

46 **Palabras-Clave:** Cuaterniones. Grupo Especial Unitario. GeoGebra. Visualización.

1. INTRODUÇÃO

47 Os Quaternions foram desenvolvidos em 1843 por Willian Rowan Hamilton (1805-1865),  
 48 tendo estes surgido a partir de uma tentativa de generalização dos números complexos na forma  
 49  $z = a + bi$  em três dimensões (Menon, 2009). Há razoabilidade nas definições de Hamilton e  
 50 na forma como é preservada a analogia entre a teoria dos pares e a teoria dos singulares. Em  
 51 outras palavras, para preservar esta analogia entre os números complexos (pares) e os números  
 52 reais (singulares) faz-se necessário que os números complexos tenham exatamente a mesma  
 53 estrutura dos números reais (Naiman, 1974). Esta estrutura na terminologia moderna é a de  
 54 uma álgebra de divisão associativa comutativa.

55 Assim, os quaternions são uma extensão dos números complexos, sendo  $\mathbb{H}$  o conjunto dos  
 56 quaternions. Enquanto os números complexos têm duas partes, na forma  $a + bi$ , os quaternions  
 57 têm quatro partes e são representados como  $q = a + bi + cj + dk$ , onde  $i, j$  e  $k$  são unidades  
 58 arbitrárias que obedecem a certas regras de multiplicação.

59 Os quaternions são números hipercomplexos estudados em Álgebra Abstrata e, *a priori*,  
 60 existem duas estruturas quaterniônicas: os quaternions sobre  $\mathbb{R}$ , que possuem componentes  
 61 reais, e os biquaternions sobre  $\mathbb{C}$ , compostos por componentes complexas (Oliveira, 2018). Os  
 62 quaternions foram criados enquanto se procurava a construção de uma estrutura algébrica de  
 63 multiplicação que fosse associativa, tal que o quadrado de um elemento  $x$  não pudesse ser  
 64 eliminado (Mazzola; Milmeister; Weissmann, 2006), como ocorre com o produto vetorial, pois  
 65 sempre  $x \wedge x = 0$ .

66 Os quaternions tem sido objeto matemático de pesquisa em torno do desenvolvimento de  
 67 sequências lineares recorrentes, como nos trabalhos de (Horadam, 1963; Dağdeviren; Kürüz,  
 68 2020; Manguiera; Alves; Catarino, 2022; Vieira; Alves; Catarino, 2020; Vieira; Alves; Catarino,  
 69 2023). Contudo, a estrutura algébrica de um quaternion pode ser associada a certos grupos  
 70 finitos, como o grupo especial unitário dos quaternions  $SU(2)$ .

71 Neste trabalho, buscamos explorar algumas características dos quaternions em uma pers-  
 72 pectiva visual, dado o nível de abstração exigido para a sua compreensão. Para essa exploração,  
 73 contamos com o aporte do GeoGebra, um software de Geometria Dinâmica de fácil usabilidade  
 74 e de livre acesso.

75 A visualização em matemática tem sido objeto de estudo em diversas pesquisas, e o uso de  
 76 ferramentas como o GeoGebra para facilitar essa visualização tem recebido atenção especial  
 77 (Alves, 2020; Sousa et al., 2021; Sousa; Alves; Aires, 2023). A visualização pode facilitar a  
 78 compreensão de conceitos abstratos, promover insights criativos e auxiliar na resolução de

79 problemas. Ferramentas visuais como softwares e aplicativos ajudam na construção do raci-  
 80 ocínio matemático, permitindo que os estudantes percebam relações e entendam conceitos  
 81 matemáticos de uma maneira mais concreta (Mathias; Silva; Leivas, 2019).

82 A visualização de conceitos abstratos como os quaternions e grupos de Lie apresenta de-  
 83 safios devido à sua natureza complexa e multidimensional. Para superar essas dificuldades,  
 84 ferramentas computacionais, como o GeoGebra, podem ser utilizadas para criar representações  
 85 visuais mais acessíveis. A necessidade de desenvolver representações visuais intuitivas para  
 86 conceitos altamente abstratos são fundamentais na compreensão da essência do conceito  
 87 (Alves, 2020; Settimy; Bairral, 2020), mesmo que não sejam representações diretas do ob-  
 88 jeto matemático, facilitando assim a discussão e compreensão de temas mais desafiadores e  
 89 complexos.

## 2. QUATERNIONS E SUAS PROPRIEDADES

Os quaternions são apresentados como somas formais entre escalares e vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões. Assim, um quaternion pode ser descrito por (Waerden, 1976):

$$q = a + bi + cj + dk$$

90 onde  $a, b$  e  $c$  são números reais e  $i, j$  e  $k$  compõem a parte ortogonal na base  $\mathbb{R}^3$ . A partir  
 91 da sua definição, é possível realizar operações matemáticas entre dois quaternions, sendo  
 92  $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$  e  $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$  dois quaternions distintos. Observe:

93 • Adição:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k;$$

94 • Subtração:

$$q_1 - q_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k;$$

95 • Igualdade:  $q_1 = q_2$  se, e somente se,  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$  e  $d_1 = d_2$ ;

96

97 • Multiplicação por escalar: seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$\alpha q = \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk.$$

98 E ainda, como apresentado em Horadam (1993) é possível realizar o produto quaterniônico, em  
 99 que são válidas algumas relações específicas como  $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i =$   
 100  $-kj$  e  $ki = j = -ik$ . Halici (2012) desenvolve algumas propriedades em torno dos quaternions,  
 101 que são:

102 O conjugado do quaternion, descrito por:

$$q^* = a - bi - cj - dk.$$

103 O produto de dois quaternions conjugados é dado por  $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$ . Para dois quaternions  
 104 quaisquer  $q_1$  e  $q_2$ , esta propriedade mantém-se válida e pode ser expressa como  $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$ .

105 A norma de um quaternion é apresentada como

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

106 Se um quaternion tem norma igual a 1, então ele é chamado de quaternion unitário, o que  
 107 pode ser representado por:

$$\|q\| = \|q^*\| = 1, q^*q = 1.$$

108 Assim, escrevemos:

$$q^*qq^{-1} = \|q\|q^{-1} = q^*.$$

109 E ainda, o inverso de um quaternion é dado por:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|} = \frac{q^*}{\|q\|^2}.$$

110 Como mencionado anteriormente, Hamilton elaborou os quaternions à medida que buscava  
 111 construir uma estrutura algébrica multiplicativa que fosse associativa, tal que o quadrado de  
 112 um elemento  $x$  não pudesse ser aniquilado da operação (Mazzola; Milmeister; Weissmann,  
 113 2006), como no produto vetorial. Desta forma, a solução de Hamilton foi adicionar uma nova  
 114 dimensão às três dimensões de  $\mathbb{R}^3$ , delegando a parte que não desaparece do quadrado à essa  
 115 nova dimensão.

116 Sua justificativa, um tanto filosófica, para tal estratégia era de que "as três coordenadas  
 117 espaciais deveriam ser complementadas por uma coordenada temporal para descrever o espaço-  
 118 tempo quadridimensional que o abrange"(Mazzola; Milmeister; Weissmann, 2006, p.335). O  
 119 que também justifica o fato de que a nova componente do produto de Hamilton de  $u, v \in \mathbb{R}^3$   
 120 era apenas o negativo do produto escalar  $-(u, v)$ , como na definição do produto vetorial, que é  
 121 diretamente relacionado à forma bilinear do espaço euclidiano.

122 Assim, pode-se entender que não há arbitrariedade na construção de Hamilton, pois com  
 123 sua criação além de ser possível mostrar que  $\mathbb{C}$  é o único corpo de 2 dimensões sobre  $\mathbb{R}$ , também  
 124 é possível provar que o conjunto de quatérnios  $\mathbb{H}$  é o único campo assimétrico de 4 dimensões  
 125 sobre  $\mathbb{R}$  (Mazzola; Milmeister; Weissmann, 2006).

### 3. O GRUPO DOS QUATERNIONS E SUAS CARACTERIZAÇÕES COMO GRUPO DE LIE SU(2)

126 A partir do estudo sobre representações de simetrias e topologia dos grupos de rotações,  
 127 temos que um grupo de Lie consiste em uma variedade diferenciável, que é simultaneamente um  
 128 grupo algébrico, de modo que a estrutura algébrica é compatível com a estrutura diferenciável,  
 129 isto é, as operações algébricas de produto e inversão são aplicações diferenciáveis (Sattinger;  
 130 Weaver, 2013; Rossmann, 2002).

131 Uma variedade diferenciável é uma generalização dos conceitos de superfícies em espaços  
 132 euclidianos. Mas de maneira formal, ela é um espaço topológico que localmente se assemelha  
 133 a um espaço euclidiano, e as transições entre essas regiões são suaves. Tanto o grupo dos  
 134 quaternions quanto o grupo de Lie  $SU(2)$  podem ser vistos como variedades diferenciáveis no  
 135 espaço.

136 Nesse sentido, ao afirmar que  $G$  é uma variedade diferenciável, quer dizer que no entorno  
 137 de qualquer elemento  $a \in G$  há um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , de modo que qualquer  
 138 elemento de grupo naquele entorno pode ser escrito em função destas coordenadas  $b =$   
 139  $b(x_1, \dots, x_n)$  (Forger; Antoneli, 2011).

140 Buscamos aqui apresentar uma breve introdução aos grupos de Lie lineares começando  
 141 com o grupo de rotações no espaço tridimensional, conhecido como grupo  $SO(3)$ , expandindo

142 para seu isomorfismo em  $SU(2)$  e sua relação com as estruturas de quaternions. É possível apre-  
 143 sentar características geométricas, o que nos permitiu desenvolver uma forma de visualização,  
 144 mostrada mais adiante.

145 O grupo  $SO(3)$  é o grupo das rotações em  $\mathbb{R}^3$ , que por sua vez pode ser descrita por um  
 146 vetor unitário  $\vec{n}$  e por um ângulo de rotação  $s$ . Para definirmos um eixo de rotação faz-se  
 147 necessário dois ângulos  $(\theta, \varphi)$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Dessa forma, o eixo de  
 148 rotação  $\vec{n}$  pode ser visto também como um ponto da esfera unitária  $\mathbb{S}^3$ . É importante salientar  
 149 que, por convenção matemática, as rotações são consideradas positivas quando tomadas no  
 150 sentido anti-horário. Assim, a variedade que equivale ao grupo  $SO(3)$  é o espaço projetivo real  
 151 tridimensional, que pode ser entendido também como a esfera  $\mathbb{S}^3$  (Sattinger; Weaver, 2013;  
 152 Rossmann, 2002).

153 Um grupo especial unitário de grau  $n$ , denominado por  $SU(n)$ , é o grupo das matrizes  
 154 complexas  $n$  por  $n$  unitárias e com determinante igual a 1, sendo o produto de matrizes a  
 155 operação do grupo. O  $SU(n)$  é um subgrupo do grupo linear geral  $GL(n, \mathbb{C})$ .

156 O caso mais simples de um grupo especial unitário é o  $SU(1)$ , que é um grupo trivial  
 157 composto por um único elemento. Já o grupo  $SU(2)$  é isomorfo ao grupo dos quatérnios com  
 158 valor absoluto 1, que por sua vez é difeomorfo à esfera de dimensão 3 (Andraca, 2007; Puri et  
 al., 2001), conhecida como esfera de Bloch (Figura 1):

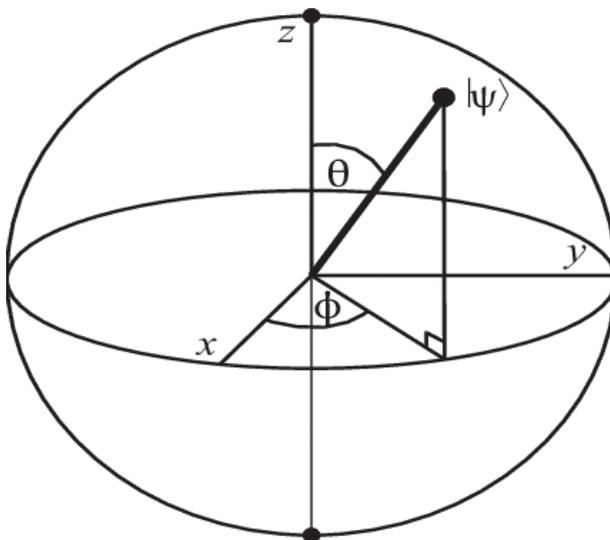


Figura 1. Representação de um qubit como elemento da Esfera de Bloch (Andraca, 2007).

159 Na Figura 1, temos um exemplo do emprego do grupo  $SU(2)$  na representação visual de  
 160 um qubit  $(\psi)$ , utilizado em computação quântica, que pode ser caracterizado pela equação  
 161  $\psi \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$  (Andraca, 2007, p. 24). Qubits podem ser descritos por vetores  
 162 unitários no espaço de Hilbert, e a esfera de Bloch é uma maneira visual de representar esses  
 163 estados (Ali; El-Sheimy et al., 2013).

164 O quaternion é uma parametrização que pode ser usada para representar a orientação  
 165 relativa entre dois sistemas de coordenadas (Ali; El-Sheimy et al., 2013). Dado um quaternion  
 166  $q = (w, x, y, z)$ , temos que  $w$  é a magnitude de um quaternion  $w_0$  de rotação ou norma de um  
 167 quaternion e as outras 3 componentes  $(x, y, z)$  representam os três eixos sobre os quais esta  
 168

169 rotação ocorre.

170 Neste caso, um quaternion de rotação  $q$  pode ser representado como:

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + u \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

171 em que  $\theta$  é o ângulo de rotação e  $u$  é um vetor unitário que define o eixo de rotação.

172 Podemos observar que esta magnitude de rotação é sempre igual a 1 para quaternions  
173 de rotação unitários. Isto ocorre, pois, a condição de unidade para quaternions implica que

$$174 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1.$$

175 No caso, podemos entender a representação visual da parte vetorial como um quaternion,  
176 através de uma coordenada esférica. A parte vetorial do quaternion, que é  $u \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , pode ser  
177 visualmente associada a um vetor tridimensional, que, por sua vez, pode ser representado em  
178 coordenadas esféricas (Ali; El-Sheimy *et al.*, 2013; Szekeres, 2004). Com o Teorema 1, podemos  
179 normalizar a parte escalar para a esfera de raio 1.

180 **Teorema 1.** *A parte escalar de um quaternion unitário pode ser normalizada (norma euclidiana*  
181 *1) para representações em uma esfera unitária de raio 1 (Szekeres, 2004).*

182 *Demonstração.* Consideremos um quaternion unitário  $q$ , expresso por:

$$q = w + xi + yj + zk$$

183 onde  $w, x, y, z$  são números reais e  $i, j, k$  são unidades imaginárias que satisfazem:  $i^2 = j^2 =$   
184  $k^2 = ijk = -1$ . Para ser um quaternion unitário a norma euclidiana de  $q$  deve ser igual a 1, ou  
185 seja  $\|q\| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1$ .

186 Neste caso, temos que a parte escalar de  $w$  pode ser normalizada para uma representação  
187 em uma esfera de unitária de raio 1.

188 Dado que  $q$  é unitário, tem-se que  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Assim, sua norma será:

$$\|q\| = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

189 e temos que  $\|q\| = 1$ .

190 A parte vetorial  $q$  é dada por  $\vec{v} = xi + yj + zk$ . A norma da parte vetorial é:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

191 A partir da definição da norma de  $q$ , podemos expressar  $\|\vec{v}\|$  em termos de  $w$ :

$$\begin{aligned} w^2 + \|\vec{v}\|^2 &= 1 \\ \|\vec{v}\|^2 &= 1 - w^2 \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{1 - w^2} \end{aligned}$$

192 Para que  $w$  seja a parte escalar normalizada em uma esfera unitária de raio 1, precisamos  
193 mostrar que  $\|w\| = 1$  dentro do contexto da esfera unitária.

194 A esfera unitária  $S^3$  em quatro dimensões é definida por:

$$S^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 | w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

195 Vemos que, dado  $q$  unitário,  $w$  deve satisfazer  $-1 \leq w \leq 1$ . No contexto da esfera unitária  
 196  $S^3$ , a normalização implica que  $w$  deve estar entre  $-1$  e  $1$ , mantendo a unidade.

197 Como mostramos que  $w$  deve satisfazer  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e que  $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 - w^2}$ ,  
 198 podemos concluir que a parte escalar  $w$  de um quaternion unitário pode ser normalizada dentro  
 199 do intervalo  $[-1, 1]$ .  $\square$

200 Dada a característica dos quaternions unitários que permite seu uso para representar  
 201 rotações no espaço  $\mathbb{R}^3$ , temos o que podemos chamar de homomorfismo sobrejetivo da  $SU(2)$   
 202 no grupo de rotações  $SO(3)$ , cujo centro é  $+i, -i$ . Ou seja, o grupo especial unitário dos  
 203 quaternions, denotado como  $SU(2)$ , é um grupo de Lie que consiste em quaternions unitários  
 204 (quaternions com norma 1). Matematicamente, pode ser representado por:

$$SU(2) = \{q \in \mathbb{H} | q \cdot q^* = 1\}, \quad (1)$$

205 onde  $\mathbb{H}$  é o conjunto dos quaternions e  $q^*$  é o conjugado de  $q$  (Tung, 1985).

206 Este grupo é uma classe de Grupo de Lie, o que significa que ele é uma variedade diferen-  
 207 ciável com uma estrutura de grupo que é compatível com a diferenciação (Hall; Hall, 2015) e  
 208 descreve transformações lineares especiais no espaço complexo bidimensional (Tung, 1985;  
 209 Hall; Hall, 2015). Ele é definido como o conjunto de todas as matrizes unitárias  $2 \times 2$  com  
 210 determinante 1 e pode ser expresso por:

$$SU(2) = \{U \in \mathbb{C}^{2 \times 2} | U^\dagger U = I; \det(U) = 1\}, \quad (2)$$

211 onde  $U$  é a matriz unitária e  $U^\dagger$  denota a matriz adjunta de  $U$  (o conjugado transposto) e  $I$  é a  
 212 matriz identidade  $2 \times 2$ .

213 Vale ressaltar que uma rotação no espaço é especificada por um eixo de rotação e por um  
 214 ângulo de rotação, em que o eixo consiste em um vetor e o ângulo será descrito em torno deste  
 215 vetor. Hamilton buscou trabalhar rotações no  $\mathbb{R}^3$  através do produto entre quaternions (Hilgert;  
 216 Neeb, 2012).

217 Notemos que um quaternion  $q$  pode determinar uma transformação linear  $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ao  
 218 associarmos um ponto do espaço tridimensional  $(x, y, z)$  a um quaternion puro  $w = xi + yj + zk$ .  
 219 Assim, define-se uma transformação  $R_q(x, y, z) = qwq^{-1} = (x^j, y^j, z^j)$  onde  $q$  é um quaternion  
 220 unitário (Santos et al., 2012). A partir do método de produto de quaternions para efetuar  
 221 rotações, por meio da transformação  $R_q$ , pode-se deduzir as matrizes elementares de rotação  
 222 no espaço com base nas demonstrações de Hilgert e Neeb (2012).

223 Dado o ângulo de rotação:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arccos a \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= a \end{aligned}$$

224 Para descrevermos o vetor eixo de rotação, deve-se considerar, a princípio, a rotação em  
 225 torno do eixo  $x$ , de modo que  $q_x = a + bi$ . Temos que  $q_x$  é um quaternion unitário, o que implica  
 226 que então  $a^2 + b^2 = 1$ , do qual segue que  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = b$ . Para encontrar as matrizes de rotação,

227 deve-se aplicar cada um dos vetores da base  $i, j, k$ :

$$\begin{aligned} R_{q_x}(i) &= (a + bi)i(a - bi) \\ &= (ai - b)(a - bi) \\ &= a^2i + ab - ab + b^2i \\ &= (a^2 + b^2)i \\ &= i \end{aligned}$$

228

$$\begin{aligned} R_{q_x}(j) &= (a + bi)j(a - bi) \\ &= (aj + bk)(a - bi) \\ &= (a^2 - b^2)j + 2abk \end{aligned}$$

229 e considerando as relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha &= \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

230 Ao substituírmos  $\alpha$  por  $\frac{\theta}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \theta}{2} &= \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \theta &= \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

231 e ao substituírmos mais uma vez  $\alpha$  por  $\frac{\theta}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos(\theta) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

232 o que implica que  $R_{q_x}(j) = \cos \theta j + \operatorname{sen} \theta k$ .

$$\begin{aligned} R_{q_x}(k) &= (a + bi)k(a - bi) \\ &= (ak - bj)(a - bi) \\ &= -2abj + (a^2 - b^2)k \\ &= -\operatorname{sen} \theta j + \cos \theta k \end{aligned}$$

233 via quaternions, encontramos triplas ordenadas:

$$\begin{aligned} R_{q_x}(i) &= i + 0j + 0k = (1, 0, 0) \\ &= 0i + \cos \theta j + \operatorname{sen} \theta k = (0, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \\ &= 0i - \operatorname{sen} \theta j + \cos \theta k = (0, -\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

234 em que estas triplas são os vetores coluna na matriz de rotação. Desta forma, a matriz de  
 235 rotação no eixo  $x$  é:

$$R_{q_x}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

236 Dada a brevidade da extensão do manuscrito, não demonstraremos as matrizes de rotação nos  
 237 eixos  $y$  e  $z$ , no entanto, ressaltamos que o procedimento algébrico é análogo. Deixamos aqui as  
 238 matrizes e na seção seguinte temos seu uso de forma visual no GeoGebra:

$$R_{q_y}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_{q_z}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

239 A relação entre quaternions e grupos finitos muitas vezes envolve representações de grupos.  
 240 E no caso particular da relação entre grupos de Lie e quaternions, esta é particularmente  
 241 interessante quando se considera o Grupo Especial Unitário  $SU(2)$ , pois ele é isomorfo ao grupo  
 242 de unidade dos quaternions, denotado como  $\mathbb{S}^3$ , que consiste em todos os quaternions unitários  
 243 (Szekerés, 2004; Sattinger; Weaver, 2013; Rossmann, 2002). Essa relação é conhecida como  
 244 cobertura dupla.

245 Um exemplo prático disto é a relação entre o grupo de rotações tridimensionais  $SO(3)$   
 246 e  $SU(2)$ , de forma não trivial, sendo conhecido como a representação de dois-vetores dos  
 247 quaternions (Kuipers, 1999). A correspondência, neste caso, a cobertura dupla é estabelecida  
 248 de modo que cada elemento em  $SU(2)$  é associado a dois elementos em  $SO(3)$ . Essa relação é  
 249 fundamental em Física Quântica, especialmente na Teoria de Spin<sup>1</sup>.

250 Em suma, a relação entre grupos finitos e quaternions está frequentemente ligada ao  
 251 grupo de unidade dos quaternions  $SU(2)$  e suas representações. A natureza algébrica dos  
 252 quaternions e sua relação com alguns grupos de Lie têm implicações importantes em várias  
 253 áreas da matemática e física, em que a relação específica depende das propriedades matemáticas  
 254 do grupo finito em questão. Essa relação pode ser estabelecida por meio de correspondências  
 255 matriciais, isomorfismos e propriedades algébricas, tendo aplicações significativas na descrição  
 256 de simetrias, rotações e propriedades em diversas áreas da física teórica.

1 O spin é uma propriedade que não se compara com nada que existe em nossa volta. Ele está associado com a maneira como os elétrons ocupam os níveis de energia no átomo. Um elétron pode ter o spin "up" (para cima) ou "down" (para baixo).

#### 4. VISUALIZAÇÃO DA ESTRUTURA DE UM QUATERNION ENQUANTO GRUPO SU(2)

Veremos nesta seção a estrutura algébrica de um quaternion em três dimensões, que pode ser usado para descrever rotações no espaço. Segundo **Mazzola, Milmeister e Weissmann (2006)**, há uma estreita relação entre álgebra e geometria, sendo esta relação considerada clássica na geometria algébrica, mas que se intensifica para os grupos de transformações na geometria linear. "Não é por acaso que esse campo de pesquisa recebe o nome de álgebra geométrica"(p. 334).

A relação entre os quaternions e estruturas algébricas de grupos finitos é complexa e multifacetada, exigindo um nível de abstração para a compreensão de suas propriedades e aplicações. Entretanto, a visualização de sua estrutura possibilita uma melhor compreensão dentro de diversas áreas da matemática e da física ao descrever simetrias, rotações, entre outras transformações importantes. Nesse sentido, a teoria dos grupos finitos e a álgebra dos quaternions fornecem ferramentas poderosas para entender e modelar esses fenômenos.

O GeoGebra é uma ferramenta que permite explorar visualmente conceitos matemáticos, incluindo quaternions. Sua interface é um "ambiente de geometria dinâmica que permite a criação, visualização e manipulação de representações de conceitos matemáticos, tratando geometria, álgebra e cálculo de forma interligada"(Sousa; Alves; Aires, 2023, p. 3), entre outras possibilidades. Contudo, o GeoGebra não possui uma funcionalidade embutida para manipulação direta de quaternions, por estes serem elementos da quarta dimensão. Mas é possível criar construções que possam mostrar uma representação visual dos conceitos associados às suas estruturas.

A seguir, ilustramos uma construção realizada no GeoGebra (Figures 2 and 3)<sup>2</sup>, que possibilitam esta exploração visual:

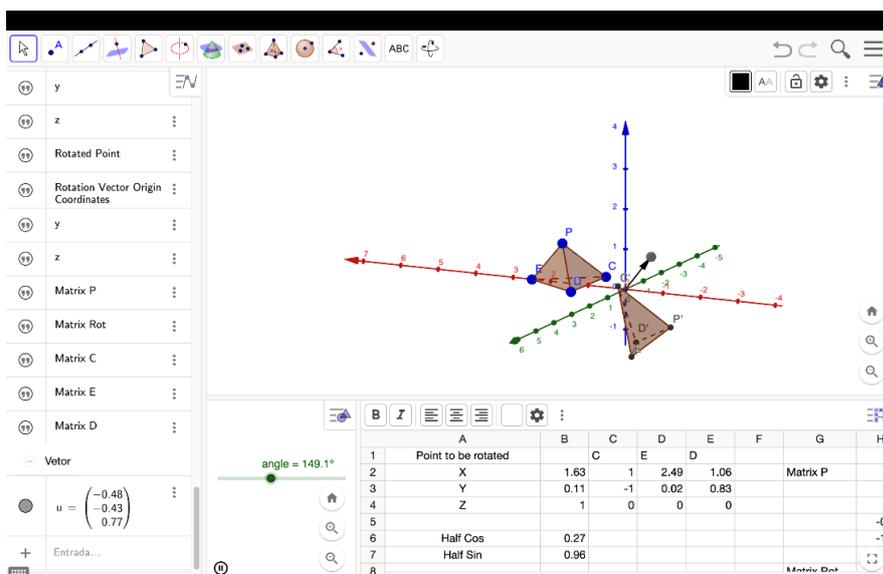


Figura 2. Representação da estrutura de um quaternion no GeoGebra

<sup>2</sup> Construção disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fstapcw4>

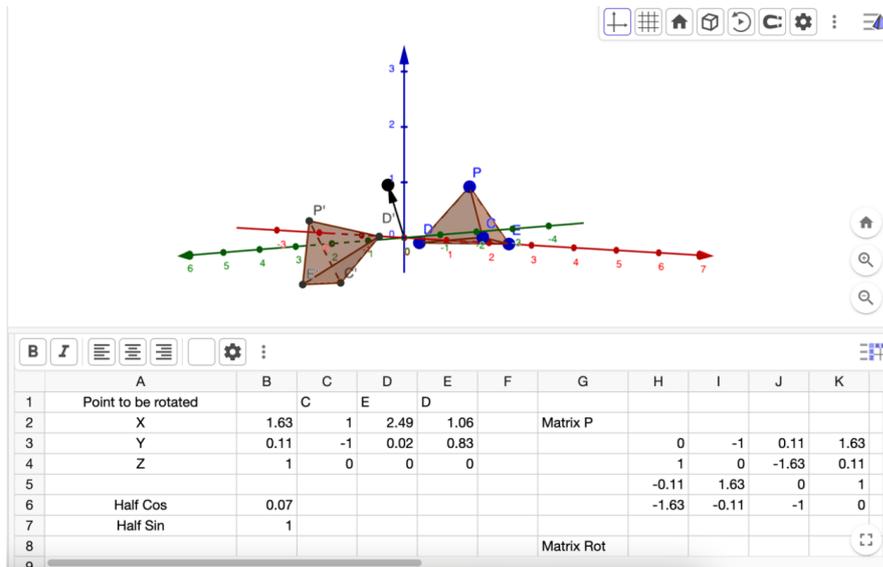


Figura 3. Representação da estrutura de um quaternion no GeoGebra

279 Nas Figuras 2 e 3, temos uma construção que envolve a representação gráfica de um quater-  
 280 nion. Utilizamos o GeoGebra para criar uma representação gráfica de um quaternions a partir  
 281 da construção de matrizes de rotação relacionadas ao vetor unitário  $\vec{u}$  que parte da origem.  
 282 Assim, conseguimos exibir as partes real e unidades arbitrárias em um sistema tridimensional.  
 283 Ao criar pontos para representar os quaternions na forma  $a + bi + cj + dk$ , onde  $a, b, c$  e  $d$  são  
 284 as partes reais e  $i, j, k$  são as unidades arbitrárias, pode-se usar a janela 3D para visualizar os  
 285 pontos no espaço.

286 Na Figura 4, temos uma simulação da rotação de um quaternion no espaço, em que bus-  
 287 camos construir uma sequência de imagens que mostrasse a visualização destas rotações.  
 288 Frequentemente os quaternions são utilizados em aplicações a partir de rotações tridimensio-  
 289 nais. Assim, é possível também ilustrar por meio de animações as rotações de quaternions no  
 290 GeoGebra e explorar a relação entre quaternions e rotações em torno de eixos no espaço:

291 Um quaternion de rotação é composto por uma parte escalar (real) e uma parte vetorial  
 292 (imaginária). A parte vetorial representa um eixo de rotação, em torno do qual a rotação ocorre.  
 293 Já o comprimento desse vetor define o ângulo de rotação, em que quanto maior o comprimento,  
 294 maior será o ângulo de rotação. Assim, a operação de rotação, ou seja, a aplicação de um  
 295 quaternion de rotação a um ponto ou objeto tridimensional, resulta em uma rotação desse  
 296 ponto ou objeto em torno do eixo especificado.

297 A partir dessas considerações, observamos que as rotações em três dimensões também  
 298 formam um grupo. Isto é, ao compormos uma rotação ao redor de um eixo  $\vec{m}$  com um ângulo  $s$   
 299 e depois aplicarmos uma rotação ao redor de um eixo  $\vec{n}$  com um ângulo  $t$ , existirá um eixo  $\vec{p}$   
 300 e um ângulo  $r$  tal que a composição das duas rotações anteriores será uma rotação ao redor  
 301 de  $\vec{p}$  por um ângulo  $r$ .

302 Neste contexto, a Figura 5 apresenta uma representação do grupo  $SU(2)$  que é isomorfo  
 303 ao grupo dos quaternions de valor absoluto 1. Por sua vez, este grupo é difeomorfo à esfera de  
 304 dimensão 3 e raio unitário (Figura 5):

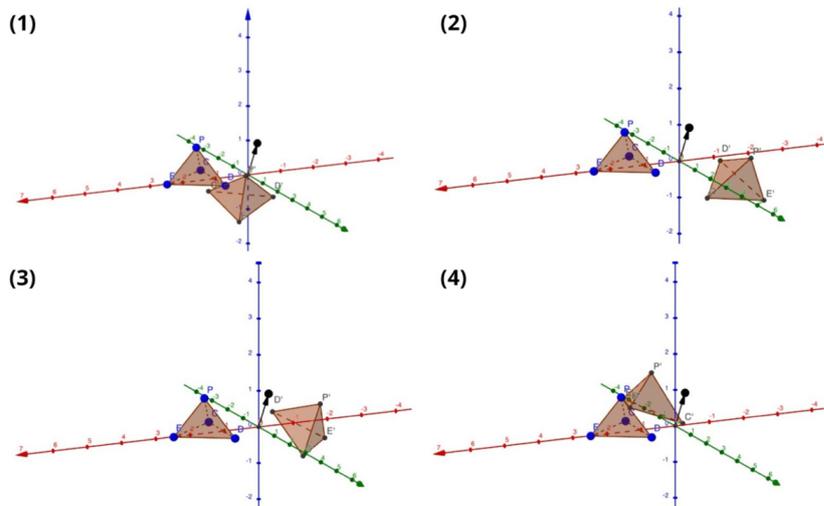


Figura 4. Rotação de um quaternion no GeoGebra, modelo visual no GeoGebra

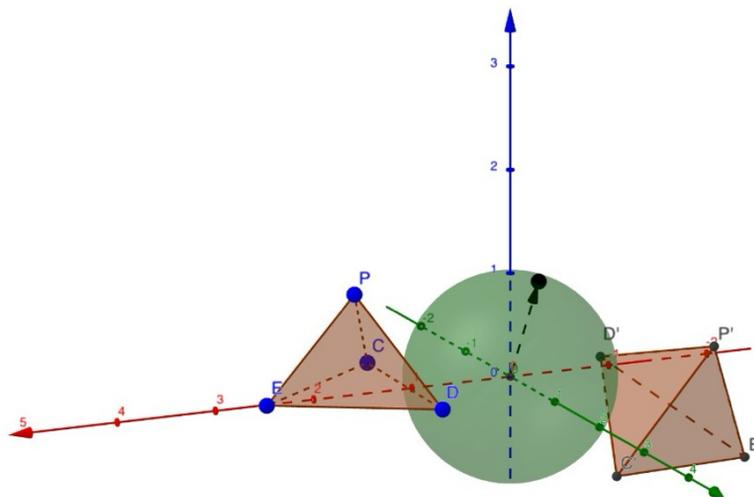


Figura 5. Representação da esfera de dimensão 3

305 Na Figura 5 buscamos mostrar a exploração de Grupos de Unidade. Embora não haja uma  
 306 representação direta do grupo de unidade dos quaternions ( $SU(2)$ ) no GeoGebra, é possível  
 307 explorar visualmente conceitos relacionados a grupos, como a unidade e a multiplicação de  
 308 elementos.

309 Já na Figura 6, buscamos mostrar a associação um ponto a um vetor no espaço, que se  
 310 move sob a aplicação repetida de rotações quaternionianas, em que a sequência de posições  
 311 ao longo do tempo ou rotação pode ser considerada uma espécie de "órbita":

312 Nota-se na 6 que cada ponto no espaço que está sendo rotacionado pode ser considerado  
 313 como percorrendo uma órbita sob sucessivas rotações. E, neste caso, esta órbita dependerá da  
 314 sequência específica de rotações aplicadas e da ordem em que são aplicadas, pois mudanças na

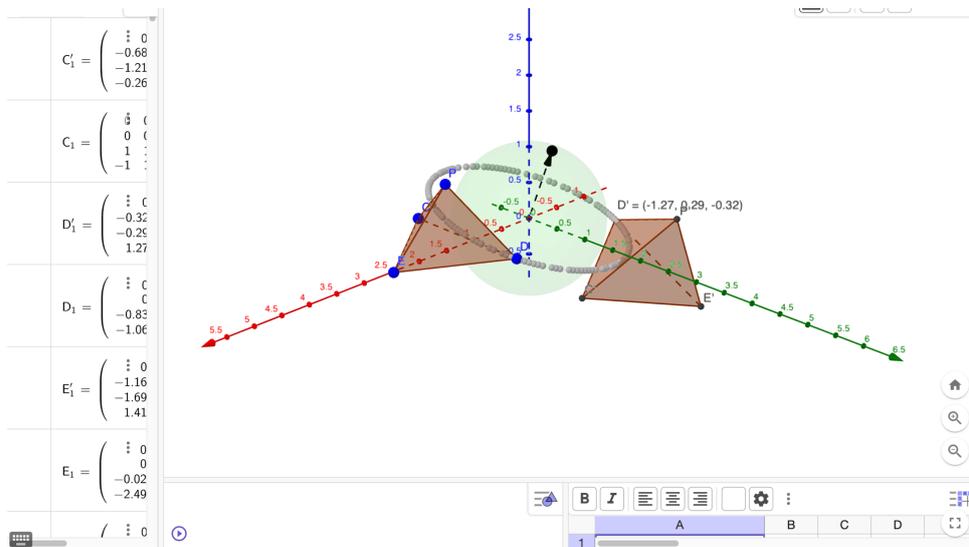


Figura 6. Exemplo de rotação quaternioniana

315 ordem ou nos ângulos de rotação podem levar a diferentes trajetórias.  
 316 Dessa forma, é possível ampliar o leque de exploração visual, criando construções que  
 317 demonstrem as propriedades de multiplicação dos quaternions, como associatividade, identi-  
 318 dade e inverso, em que podemos representar os quaternions como pontos ou vetores em um  
 319 espaço tridimensional e demonstrar como a multiplicação entre eles se comporta. Além disso,  
 320 é possível elaborar construções interativas no GeoGebra que permitam aos usuários explorar e  
 321 experimentar com os conceitos de grupo de unidade dos quaternions, mesmo que não haja  
 322 uma representação direta disponível.  
 323 Para construir estruturas mais avançadas relacionadas ao estudo dos quaternions, o usuário  
 324 pode explorar a capacidade de programação do GeoGebra, a partir do uso de scripts e constru-  
 325 ções dinâmicas com base em fórmulas. Vale ressaltar que, devido à natureza gráfica e interativa  
 326 do GeoGebra, a ênfase deste estudo recai sobre a exploração conceitual a partir da visualização,  
 327 pois o GeoGebra não é uma ferramenta dedicada para manipulação direta de quaternions e  
 328 álgebra de quaternions.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

329 Uma representação de grupo é uma maneira de associar matrizes a elementos do grupo  
 330 de uma forma que preserve a sua estrutura. Certos grupos finitos podem ser relacionados ao  
 331 grupo  $SU(2)$  ou, mais geralmente, aos quaternions. Os quaternions podem ser utilizados para  
 332 representar rotações tridimensionais, em que cada quaternion unitário pode ser associado a  
 333 uma rotação única em torno de um eixo no  $\mathbb{R}^3$ . A associação entre os quaternions e  $SU(2)$   
 334 está na forma como os quaternions podem ser usados para representar elementos de  $SU(2)$ .  
 335 No caso, tem uma correspondência entre os quaternions unitários e as matrizes  $SU(2)$ , que é  
 336 explorada nos grupos de Lie, comumente no contexto das rotações

337 Nota-se, diante dos referenciais teóricos explorados, que a relação entre quaternions e  
 338 grupos finitos é crucial para a Física, especialmente na descrição de rotações e orientações no  
 339 espaço  $\mathbb{R}^3$ , bem como em teorias de partículas elementares. Os quaternions fornecem uma  
 340 maneira eficaz de representar rotações tridimensionais e são essenciais em aplicações práticas,  
 341 como gráficos por computador e robótica, engenharia aeroespacial, entre outros.

342 Discutir a relação entre o grupo dos quaternions e o grupo de Lie  $SU(2)$ , especialmente a  
 343 partir da visualização via software GeoGebra possibilita uma compreensão mais aprofundada  
 344 de conceitos matemáticos complexos. Ambos os grupos estão associados a ideias com alto nível  
 345 de abstração e a visualização oferecida pelo GeoGebra possibilita tornar esses conceitos mais  
 346 acessíveis a estudantes e pesquisadores.

347 Além disso, a visualização via GeoGebra estimula a pesquisa avançada, em que o software  
 348 permite explorar e validar hipóteses sobre as propriedades intrincadas desses grupos mate-  
 349 máticos. Dessa forma, discutir essa relação não apenas facilita a compreensão de conceitos  
 350 abstratos, mas também impulsiona a pesquisa, enriquecendo o campo da matemática pura e  
 351 aplicada. O estudo destes grupos de maneira combinada, sobretudo aliados ao GeoGebra é  
 352 algo novo, ainda não discutido na literatura matemática.

353 Nesse sentido, o estudo destes grupos de maneira combinada e suas possibilidades com o  
 354 GeoGebra configura-se em uma possibilidade de exploração visual e interpretação de proble-  
 355 mas no campo prático, em uma perspectiva que interliga os campos algébrico e geométrico,  
 356 contribuindo para a construção e evolução de suas aplicações, bem como para o crescimento  
 357 matemático de estudantes em formação inicial. Entretanto, para um melhor aproveitamento  
 358 nos estudos deste tema, recomendamos uma revisão sobre álgebra linear, teoria dos grupos e  
 359 geometria diferencial, para uma compreensão mais completa dos tópicos abordados.

## 6. REFERÊNCIAS

360 ALI, A.; EL-SHEIMY, N. *et al.* Low-cost mems-based pedestrian navigation technique for gps-  
 361 denied areas. **Journal of Sensors**, Hindawi, v. 2013, 2013.

362 ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (sdos): ensino de olimpíadas de matemática com  
 363 arrimo no software geogebra como recurso na visualização. **Alexandria: Revista de Educação**  
 364 **em Ciência e Tecnologia**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 13, n. 1, p. 319–349,  
 365 2020.

366 ANDRACA, S. E. V. Introduccion a la computacion cuántica. Citeseer, 2007.

367 DAĞDEVIREN, A.; KÜRÜZ, F. On the horadam hybrid quaternions. **arXiv preprint ar-**  
 368 **Xiv:2012.08277**, 2020.

369 FORGER, M.; ANTONELI, F. **Fibrados, Conexões e Classes Características**. [S.l.]: IME-USP, 2011.

370 HALICI, S. On Fibonacci quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, v. 22, n. 2, p. 321–327, 2012.

371 HALL, B. C.; HALL, B. C. **Lie groups, Lie algebras, and representations**. [S.l.]: Springer, 2015.

372 HILGERT, J.; NEEB, K.-H. **Structure and geometry of Lie groups**. [S.l.]: Springer Science & Business  
 373 Media, 2012.

- 374 HORADAM, A. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, n. 2, p. 23–33, 1993.
- 375 HORADAM, A. F. Complex fibonacci numbers and fibonacci quaternions. **The American Mathe-**  
376 **matical Monthly**, JSTOR, v. 70, n. 3, p. 289–291, 1963.
- 377 KUIPERS, J. B. **Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits,**  
378 **aerospace, and virtual reality.** [S.l.]: Princeton university press, 1999.
- 379 MANGUEIRA, M. d. S.; ALVES, F.; CATARINO, P. Hybrid quaternions of leonardo. **Trends in**  
380 **Computational and Applied Mathematics**, SciELO Brasil, v. 23, p. 51–62, 2022.
- 381 MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. da; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e  
382 geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Pontifícia Universidade  
383 Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019.
- 384 MAZZOLA, G.; MILMEISTER, G.; WEISSMANN, J. **Comprehensive mathematics for computer**  
385 **scientists.** [S.l.]: Springer, 2006.
- 386 MENON, M. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira**  
387 **de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 31, p. 2305–1, 2009.
- 388 NAIMAN, A. **The Role of Quaternions in the History of Mathematice.** New York University, 1974.  
389 Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nQ9IOAAACAAJ>>.
- 390 OLIVEIRA, R. d. Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generali-  
391 zada de fibonacci: relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais.  
392 **Fortaleza, Ceará: Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática)-**  
393 **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Fortaleza, 2018.**
- 394 PURI, R. R. *et al.* **Mathematical methods of quantum optics.** [S.l.]: Springer, 2001. v. 79.
- 395 ROSSMANN, W. **Lie groups: an introduction through linear groups.** [S.l.]: Oxford University  
396 Press, USA, 2002.
- 397 SANTOS, M. V. d. *et al.* Números complexos, quatérnions e rotações. **Trabalho de conclusão de**  
398 **Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012.**
- 399 SATTINGER, D. H.; WEAVER, O. L. **Lie groups and algebras with applications to physics, geometry,**  
400 **and mechanics.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 61.
- 401 SETTIMY, T. F. de O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria  
402 espacial. **Vidya**, v. 40, n. 1, p. 177–195, 2020.
- 403 SOUSA, R. T. de; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. Categories of intuitive reasoning in the teaching of  
404 parabolae: A structured practice in didactic engineering. **International Electronic Journal of**  
405 **Mathematics Education**, Modestum, v. 18, n. 4, p. em0746, 2023.
- 406 SOUSA, R. T. de; AZEVEDO, I. F. de; LIMA, F. D. S. de; ALVES, F. R. V. Transposição didática  
407 com aporte do geogebra na passagem da geometria plana para a geometria espacial. **Revista**  
408 **Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 7, n. 5, p. 106–124, 2021.

- 409 **SZEKERES, P. A course in modern mathematical physics: groups, Hilbert space and differential**  
 410 **geometry.** [S.I.]: Cambridge University Press, 2004.
- 411 **TUNG, W.-k. Group Theory in Physics.** [S.I.]: Philadelphia: World Scientific Publishing Company,  
 412 **1985.**
- 413 **VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The (s;t)-padovan quaternions matrix**  
 414 **sequence.** **Punjab University Journal of Mathematics**, v. 52, n. 11, 2020.
- 415 **VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The sequence of the hyperbolic k-padovan**  
 416 **quaternions.** **Malaya Journal of Matematik**, v. 11, n. 03, p. 324–331, 2023.
- 417 **WAERDEN, B. L. V. D. Hamilton’s discovery of quaternions.** **Mathematics Magazine**, Taylor &  
 418 **Francis**, v. 49, n. 5, p. 227–234, 1976.