RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP
OPEN ACCESS
Volume 2, Número 1, 2024
https://doi.org/10.5281/zenodo.13147067
Recebido: 26/06/2024
Publicado: 31/07/2024

NÚMEROS TRIANGULARES-QUADRADOS-PENTAGONAIS: RELAÇÕES n-DIMENSIONAIS, FUNÇÃO GERADORA E SEQUÊNCIA DE MATRIZES

TRIANGULAR-SQUARE-PENTAGONAL NUMBERS: n-DIMENSIONAL RELATIONS, GENERATING FUNCTION, AND MATRIX SEQUENCEE

NÚMEROS TRIANGULARES-CUADRADOS-PENTAGONALES: RELACIONES n-DIMENSIONALES, FUNCIÓN GENERADORA Y SECUENCIA DE MATRICES

Francisco Regis Vieira Alves
<fregis@gmx.fr>
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil
<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

Renata Passos Machado Vieira
<re.passosm@gamil.com>
Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC), Fortaleza, CE, Brasil
<https://orcid.org/0000-0002-1966-7097>

Paula Maria Machado Cruz Catarino
<pcatarin@utad.pt>
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal
<https://orcid.org/0000-0001-6917-5093>

Resumo
No estudo dos números figurais deparamos inúmeras classes de números e com dimensão variada. De modo recorrente, registramos a descrição de certas propriedades por intermédio de relações em apenas uma variável. Assim, o presente trabalho discute duas classes especiais de números figurais, a saber: números triangulares quadrados (triangular-square numbers) e os números triangulares pentagonais (triangular pentagonal numbers) inclusive, com uma descrição correspondente em termos de recorrência de matrizes. A partir de sua extensão para variáveis n-dimensionais, o trabalho comportamento das respectivas funções geradoras e, considerando certas matrizes geradoras, apresenta a fórmula de Binet para recorrência de matrizes.

Palavras-chave: *Números triangulares quadrados. Números triangulares pentagonais. Função geradora. Matrizes.*

Abstract
In the study of figurate numbers, we encounter numerous classes of numbers with varying dimensions. Recurrently, we record the description of certain properties through relationships in only one variable. Thus, the present work discusses two special classes of figurate numbers, namely: triangular-square numbers and triangular-pentagonal numbers, including a corresponding description in terms of matrix recurrence. By extending to n-dimensional variables, the work explores the behavior of the respective generating functions and, considering certain generating matrices, presents Binet's formula for matrix recurrence.

Keywords: *Square triangular numbers. Pentagonal triangular numbers. Generating function. Matrices.*

Resumen
En el estudio de los números figurados, nos encontramos con numerosas clases de números de diferentes dimensiones. De manera recurrente, registramos la descripción de ciertas propiedades mediante relaciones en una sola variable. Así, el presente trabajo discute dos clases especiales de números figurados, a saber: números triangulares-cuadrados (triangular-square numbers) y números triangulares-pentagonales (triangular-pentagonal numbers), incluyendo una descripción correspondiente en términos de recurrencia de matrices. A partir de su extensión a variables n-dimensionales, el trabajo explora el comportamiento de las respectivas funciones generadoras y, considerando ciertas matrices generadoras, presenta la fórmula de Binet para la recurrencia de matrices.

Palabras-Clave: *Números triangulares cuadrados. Números triangulares pentagonales. Función generadora. Matrices.*

1. INTRODUÇÃO

Deza e Deza (2012) explicam que, o n-ésimo número p-gonal, denotado por $S_m(n)$, é definido pela soma $S_p(n) = 1 + (1 + \cdot(p-2)) + (1 + 2 \cdot (p-2)) + \ldots + (1 + (n-1) \cdot (p-2))$ com condição $p \geq 3$. Facilmente, determinamos que $S_p(n) = \dfrac{n[(p-2) \cdot n + 4 - p]}{2}$. Deza e Deza (2012) descrevem a seguinte relação de recorrência, considerando o conjunto $\{S_m(n)\}_{n \in \mathbb{N}}^{p \geq 3}$ da seguinte forma $S_p(n+1) = 3S_p(n) - 3S_p(n-1) - S_p(n-2)$. Decorrem das considerações anteriores que podemos desenvolver o estudo de várias propriedades dos números p-gonais a partir de propriedades decorrentes de relações de recorrência.

No contexto de múltiplos estudos, assinalamos alguns que buscam descrever relações e propriedades envolvendo duas ou mais classes de números p-gonais entre outros estudos relevantes para a presente pesquisa (Sivaraman, 2022a; Sivaraman, 2022b; Alves, 2012). Para ilustrar, na Figura 1 Caglayan (2019) indica algumas transformações e realizadas sobre os números estrela, de sorte que possam envolvem novas combinações de números triangulares.

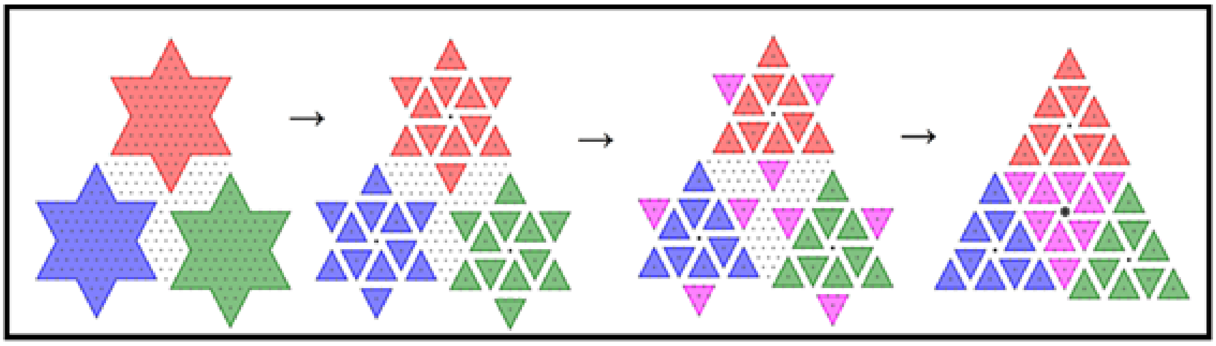

Figura 1. Caglayan (2019) descreve as relações e propriedades envolvendo os números triangulares e hexagonais.

Ademais, registramos inúmeros estudos que, a partir da análise do comportamento de algumas equações diofantinas generalizam a resolução de certos problemas aparentemente intuitivos. Com efeito, vamos considerar os seguintes conjuntos numéricos indicados por:

$$\{S_3(n)\}_{n\in\mathbb{N}}^{p=3} = \left\{0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$\{S_4(n)\}_{n\in\mathbb{N}}^{p=4} = \left\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots, n^2\right\}.$$

Facilmente, conseguimos identificar que ocorrem dois elementos comuns nas listas acima. De modo intuitivo, identificamos números que são triangulares e números quadrangulares ao mesmo tempo, isto é, o comportamento da seguinte intersecção particular dos conjuntos supramencionados: $\{S_3(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \{S_4(n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, \ldots\}$.

De modo semelhante, podermos considerar:

$\{S_3(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \{S_5(n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1, 210, 40755, 7906276, \ldots\}$.

No trabalho de Bouroubi (2020), encontramos a seguinte relação de recorrência não homogênea $TS_n = 34 \cdot TS_{n-1} - TS_{n-2} + 2, n \geq 2$, considerando o conjunto dos números triangulares-quadrangulares $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com valores iniciais $TS_0 = 0, TS_1 = 1, TS_2 = 36$.

No caso do conjunto dos números triangulares-pentagonais, que indicaremos por $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, passamos a considerar a seguinte relação de recorrência não homogênea $TP_{n+1} = 194 \cdot TP_n - TP_{n-1} + 16$ e valores iniciais $TP_0 = 0, TP_1 = 1, TP_2 = 210$.

Harman (1981) introduziu, de forma pioneira, uma interpretação para a sequência de Fibonacci no plano complexo. Diante de variados métodos matemáticos mencionados por Harman (1981), seu trabalho descreve determinadas condições de recorrência simétrica no plano, nas variáveis $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Harman (1981) denomina o conjunto acima de relações de recorrência bidimensional. Pouco mais adiante, a partir das condições iniciais estabelecidas, o autor determina que $F(n, m) = F(n) \cdot F(m-1) + F(n-1) \cdot F(m)$, para todo $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Assim, nas seções subsequentes, buscaremos generalizar a relações de recorrência unidimensional, descrita por Bouroubi (2020). Ademais, seguindo a tradição de alguns trabalhos sobre assunto correlato (Yilmaz; Soyakan, 2020), introduziremos recorrência de matrizes e, logo em seguida, as correspondentes funções geradoras e fórmula de Binet, entretanto, examinando o caso de recorrência de matrizes.

2. PRELIMINARES

Sobre a existência e determinação dos números mencionados, sugerimos o leitor consultar os detalhes do Teorema 1, que pode ser verificado em Silverman (2012) ou em outros autores (Dickson, 1971).

Teorema 1. *(square-triangular numbers) Silverman (2012).*

(a) Toda solução positiva de inteiros da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ é determinada, pela potência de termos do tipo $3+2\sqrt{2}$, isto é, as soluções são determinadas por $x_k + y_k = (3+2\sqrt{2})^k$, $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$;

(b) Todo os square-triangular numbers $n^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$ são determinados por $m = \dfrac{x_k - 1}{2}$, $n = \dfrac{y_k}{2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ e o par (x_k, y_k) é a solução de $x^2 - 2y^2 = 1$.

De modo trivial, conseguimos escrever a relação de recorrência anterior na seguinte forma homogênea $TP_{n+2} = 195 \cdot TP_{n+1} - 195 \cdot TP_n + TP_{n-1}$, com $TP_0 = 0, TP_1 = 1, TP_2 = 210$. Tais relações correspondem ao conjunto dos números $\{TP_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Em seguida, iremos descrever a relação anterior por intermédio de relações simétricas. Para todo par ordenado de inteiros positivos $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiremos as seguintes relações bidimensionais:

$$\begin{cases} TS(n+1, m) &= 35 \cdot TS(n, m) - 35 \cdot TS(n-1, m) + TS(n-2, m) \\ TS(n, m+1) &= 35 \cdot TS(n, m) - 35 \cdot TS(n, m-1) + TS(n, m-2), \end{cases}$$

considerando agora as condições $TS(0,0) = 0, TS(1,0) = 1, TS(0,1) = i, TS(1,1) = 1 + i, TS(2,0) = 36, TS(0,2) = 36i, TS(2,2) = 36 + 36i$.

Definiremos as relações bidimensionais que correspondem ao conjunto dos números triangulares-pentagonais:

$$\begin{cases} TP(n+2, m) &= 195 \cdot TS(n+1, m) - 195 \cdot TS(n, m) + TS(n-1, m) \\ TP(n, m+2) &= 195 \cdot TP(n, m+1) - 195 \cdot TP(n, m) + TP(n, m-1), \end{cases}$$

considerando agora as condições $TP(0,0) = 0, TP(1,0) = 1, TP(0,1) = i, TP(1,1) = 1 + i, TP(2,0) = 210, TP(0,2) = 210i, TP(2,2) = 210 + 210i$.

Em seguida, vejamos o nosso primeiro lema, com i sendo uma unidade imaginária.

Lema 2. *Para todo par ordenado de inteiros positivos* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $TS(n, 0) = TS(n)$ *e* $TS(0, m) = TS(m)i$ *onde* $i^2 = -1$;

(ii) $TP(n, 0) = TP(n)$ *e* $TP(0, m) = TP(m)i$.

Demonstração. Para (i): De imediato, considerando o sistema acima, tomamos a primeira relação, para o caso $(n, m) = (2, 0) \therefore 35 \cdot TS(2, 0) - 35 \cdot TS(1, 0) + TS(0, 0)$.

Decorre, facilmente que $TS(3, 0) = 35 \cdot 36 - 35 \cdot 1 = 1260 - 35 = 1225 = TS(3)$.

Para o passo indutivo escrevemos $TS(n+1, 0) = 35 \cdot TS(n, 0) - 35 \cdot TS(n-1, 0) + TS(n-2, 0) = 35 \cdot TS(n) - 35 \cdot TS(n-1) + TS(n-2) = TS(n+1)$.

No caso (ii) considerando a relação $(n, m) = (1, 0) \therefore TP(3, 0) = 195 \cdot TP(2, 0) - 195 \cdot TP(1, 0) + TP(0, 0) = 195 \cdot 210 - 195 = 195 \cdot 253 - 195 = 40950 - 195 = 40755 = TP(3)$.

Por indução matemática, vamos admitir que $TP(n+1, 0) = TP(n+1)$.

Assim, em seguida, verificaremos que $TP(n+2, 0) = 195 \cdot TP(n+1, 0) - 195 \cdot TP(n, 0) + TP(n-1, 0) = 195 \cdot TP(n+1) - 195 \cdot TP(n) + TP(n-1) = TP(n+2), n \geq 0$.

Quando consideramos a segunda relação de recorrência, teremos que $(0, 1) = (1, 0) \therefore TP(0, 3) = 195 \cdot TP(0, 2) - 195 \cdot TP(0, 1) + TP(0, 0) = 195 \cdot 210i - 195 \cdot i = 40950i - 195i = 40755i = TP(3)i$.

Por indução matemática, vamos admitir que $TP(0, m+1) = TP(m+1)i$, repetimos o argumento anterior. $\square$

Lema 3. *Para todo par ordenado de inteiros positivos* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $TS(n, 1) = TS(n) + TS(1)i$ *e* $TS(1, m) = TS(1) + TS(m)i$, *onde* $i^2 = -1$;

(ii) $TP(n,1) = TP(n) + TP(1)i$ *e* $TP(1,m) = TS(1) + TP(m)i$.

Demonstração. Para (i): Reparemos que, considerando a primeira relação de recorrência do sistema, tomando o caso particular de $m = 1$, poderemos escrever que $TS(n+1,1) = 35 \cdot TS(n,1) - 35 \cdot TS(n-1,1) + TS(n-2,1) = 35 \cdot [TS(n) + TS(1)i] - 35 \cdot [TS(n-1) + TS(1)i] + [TS(n-2) + TS(1)i] = 35 \cdot TS(n-1) + TS(n-2) + 35 \cdot TS(1)i - 35 \cdot TS(1)i + TS(1)i = TS(n+1) + TS(1)i$, isto é, vale que $TS(n+1,1) = TS(n+1) + TS(1)i$.]

Para (ii), vemos que $TS(1,m+1) = 35 \cdot TS(1,m) - 35 \cdot TS(1,m-1) + TS(1,m-2)$, com o emprego de raciocínio semelhante e emprego do modelo indutivo.

No caso do item (ii), vejamos que $(n,m) = (1,1) \therefore TP(3,1) = 195 \cdot TP(2,1) - 195 \cdot TP(1,1) + TP(0,1) = 195 \cdot (210 + i) - 195 \cdot (1 + i) + i = 40950 + 195i - 195 - 195i + i = 40755 + i = TP(3) + TP(1)i$.

Por indução sobre n admitiremos que $TP(n,1) = TP(n) + TP(1)i$, para todo $n \geq 0$.

Em seguida, consideramos $m = 1 \therefore TP(n+2,1) = 195 \cdot TP(n+1,1) - 195 \cdot TP(n,1) + TP(n-1,1) = 195 \cdot (TP(n+1) + TP(1)i) - 195 \cdot (TP(n) + TP(1)i) = 195 \cdot TP(n+1) - 195 \cdot TP(n) + TP(n-1) + 195 \cdot TP(1)i - 195(1)i + TP(1)i = TP(n+1) + TP(1)i$.

Semelhantemente, considerando a segunda relação $TP(n,m+2) = 195 \cdot TP(n,m+2) - 195 \cdot TP(n,m) + TP(n,m-1)$ tomando $n = 1$ determinaremos o resultado de interesse. $\square$

No teorema seguinte poderemos determinar uma expressão explicita correspondente aos elementos $TS(n,m)$ e $TP(n,m)$, para todo par ordenado $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Teorema 4. *Para todo par ordenado de inteiros positivos* $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $TS(n,m) = TS(n) + TS(m)i$, *onde* $i^2 = -1$;

(ii) $TP(n,m) = TP(n) + TP(m)i$.

Demonstração. Preliminarmente, vamos considerar os casos particulares $(n,m) = (3,2) \therefore TS(3,2) = 35 \cdot TS(2,2) - 35 \cdot TS(1,2) + TS(0,2) = 35 \cdot (36 + 36i) - 35 \cdot (1 + 36i) + 36i = 35 \cdot 36 + 35 \cdot 36i - 35 - 35 \cdot 36i + 36i = 1260 - 35 + 36i = TS(3) + TS(2)i$.

A partir dos Lemas 2 e 3, determinamos outros casos particulares. Fixado todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $TS(n+1,m) = 35 \cdot TS(n,m) + TS(n-2,m) = 35 \cdot [TS(n) + TS(m)i] - 35 \cdot [TS(n-1) + TS(m)i] + [TS(n-2) + TS(m)i] = 35 \cdot TS(n) + 35 \cdot TS(m)i - 35 \cdot TS(n-1) - 35 \cdot TS(m)i + TS(n-2) + TS(m)i = [35 \cdot TS(n) - 35 \cdot 35 \cdot TS(n-1) + TS(n-2)] + TS(m)i = TS(n+1) + TS(m)i$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

No item (ii), vamos tomar $(n,m) = (1,2) \therefore TP(3,2) = 195 \cdot TP(2,2) - 195 \cdot TP(1,2) + TP(0,2) = 195 \cdot (210 + 210i) - 195 \cdot (1 + 210i) + 210i = 195 \cdot 210 + 195 \cdot 210i - 195 - 195 \cdot 210i + 210i = 195 \cdot 210 - 195 + 210i = 40950 - 195 + TP(2)i = 40755 + TP(2)i = TP(3) + TP(2)i$.

Fixado todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $TP(n+2,m) = 195 \cdot TP(n+1,m) - 195 \cdot TP(n,m) + TP(n-1,m) = 195 \cdot (TP(n+1) + TP(m)i) - 195 \cdot (TP(n) + TP(m)i) + (TP(n-1) + TP(m)i) = 195 \cdot TP(n+1) + 195 \cdot TP(m)i - 195 \cdot TP(n) + TP(m)i + TP(n-1) + TP(m)i = [195 \cdot TP(n+1) - 195 \cdot TP(m) + TP(n-1)] + TP(m)i = TP(n+2) + TP(m)i$, para todo $m \geq 0$.

Dessa forma, deduzimos que $TP(n,m+2) = TP(n) + TP(m+2)i, n \geq 0$. $\square$

Bouroubi (2020) descreve a seguinte função geradora $f_{TS_n}(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)(x^2 - 34x + 1)}$. Com o emprego de argumentos semelhantes ao de Bouroubi (2020), determinaremos a seguinte função geradora $f_{TP_n}(x) = \dfrac{x^2(1+15x)}{(1-x)(1-194x+x^2)}$, denominadas de $G_{TS(n,m)}(x), G_{TS(n,m)}(x), G_{TP(n,m)}($ e $G_{TP(n,m)}(x)$ para cada respectivo caso.

Teorema 5. *Para todo par ordenado de inteiros positivos* $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $G_{TS(n,m)}(x) = \dfrac{x(1+x)TS(m)(x^2-34x+1)i}{(1-x)(x^2-34x+1)}$, *para todo inteiro fixo* $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $G_{TS(n,m)}(x) = \dfrac{TS(n)(x^2-34x+1)+x(1+x)i}{(1-x)(x^2-34x+1)}$, *para todo inteiro fixo* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $G_{TP(n,m)}(x) = \dfrac{x^2(1+15x)TP(m)(1-194x+x^2)i}{(1-x)(1-194x+x^2)}$, *para todo inteiro fixo* $m \in \mathbb{N}$;

(iv) $G_{TP(n,m)}(x) = \dfrac{x^2(1+15x)TP(m)(1-194x+x^2)}{(1-x)(1-194x+x^2)}i$, *para todo inteiro fixo* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. No caso (i), para todo inteiro fixo $m \in \mathbb{N}$, escrevemos a soma formal:

$$\begin{aligned}
G_{TS(n,m)}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} TS(n,m)\cdot x^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty}[TS(j)+TS(m)\cdot i]x^{j-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}[TS(i)]x^{j-1} + \sum_{i=0}^{\infty}[TS(m)\cdot i]x^{i-1} \\
&= \left[\frac{x(1+x)}{(1-x)(x^2-34x+1)}\right] + TS(m)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}x^{j-1}i \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)(x^2-34x+1)} + TS(m)\cdot\frac{1}{(1-x)}i \\
&= \frac{x(1+x)+TS(m)(x^2-34x+1)i}{(1-x)(x^2-34x+1)}.
\end{aligned}$$

De modo semelhante, para todo inteiro fixo $n \in \mathbb{N}$, escrevemos que:

$$\begin{aligned}
G_{TS(n,m)}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} TS(n,m)\cdot x^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty}[TS(n)]x^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty}[TS(j)\cdot i]x^{j-1} \\
&= TS(n)\frac{1}{(1-x)} + \left[\frac{x(1+x)}{(1-x)(x^2-34x+1)}\right]i.
\end{aligned}$$

No caso do item (ii), para todo inteiro fixo $m \in \mathbb{N}$, escrevemos a soma:

$$
\begin{aligned}
G_{TP(n,m)}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} TP(n,m) \cdot x^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [TP(j) + TP(m) \cdot i] x^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} TP(j) x^{j-1} + TP(m) \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{j-1} \right) i \\
&= \left(\frac{x^2(1+15x)}{(1-x)(1-194x+x^2)} \right) + TP(m) \frac{1}{1-x} i \\
&= \frac{x^2(1+15x) + TP(m)(1-194x+x^2)}{(1-x)(1-194x+x^2)} i,
\end{aligned}
$$

para todo inteiro $m \in \mathbb{N}$.

Os itens (iii) e (iv) seguem de modo semelhante aos itens (i) e (ii). $\square$

3. RELAÇÕES TRIDIMENSIONAIS E FUNÇÃO GERADORA

Para todo termo ordenado de inteiros $(n, m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiremos as relações tridimensionais:

$$
\begin{cases}
TS(n+1, m, q) &= 35 \cdot TS(n, m, p) - 35 \cdot TS(n-1, m, q) + TS(n-2, m, p) \\
TS(n, m+1, q) &= 35 \cdot TS(n, m, p) - 35 \cdot TS(n, m-1, q) + TS(n, m-2, q) \\
TS(n, m, q+1) &= 35 \cdot TS(n, m, p) - 35 \cdot TS(n, m, q-1) + TS(n, m, q-2)
\end{cases}
$$

, considerando agora as condições $TS(0,0,0) = 0, TS(1,0,0) = 1, TS(0,1,0) = i, TS(0,0,1) = j, TS(1,1,0) = 1+i, TS(1,0,1) = 1+j, TS(1,1,1) = 1+i+j, TS(2,0,0) = 36, TS(0,2,0) = 36i, TS(0,0,2) = 36j, TS(2,2,2) = 36 + 36i + 36j$.

Lema 6. *Para todo terno ordenado de inteiros* $(n, m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $TS(n,0,0) = TS(n), TS(0,m,0) = TS(m)i, TS(0,0,q) = TS(q)j$, *onde* i, j *são unidades imaginárias, tais que* $i^2 = j^2 = -1$;

(ii) $TP(n,0,0) = TP(n), TP(0,m,0) = TP(m)i, TP(0,0,q) = TP(q)j$, *onde* i, j *são unidades imaginárias, tais que* $i^2 = j^2 = -1$.

Demonstração. De imediato, repetindo os argumentos do Lema 2.

Para todo terno ordenado de inteiros $(n, m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, vamos vamos verificar o item (ii).

Com efeito, considerando o sistema de relações estudadas, no caso de $n = m = 0$, podemos verificar que $q = 2 \therefore TS(0,0,3) = 35 \cdot TS(0,0,2) - 35 \cdot TS(0,0,1) + TS(0,0,0) = 35 \cdot TS(0,0,2) - 35 \cdot TS(0,0,1)$.

Segue, realizando substituições convenientes, que $TS(0,0,3) = 1225j = TS(3)j$.

No passo indutivo sobre $q \geq 0$, ainda considerando a recorrência teremos que ocorre $TS(0,0,q+1) = 35 \cdot TS(0,0,q) - 35 \cdot TS(0,0,q-1) + TS(0,0,q-2) = [35 \cdot TS(q) - 35 \cdot TS(q-1) + TS(q-2)]j = TS(q+1)j$.

No caso do item (ii), considerando $n = m = 0$ e assumindo a propriedade de indução sobre $q \in \mathbb{N}$, segue que, considerando a terceira relação $TS(0,0,q+1) = 35 \cdot TS(0,0,q)35 \cdot TS(0,0,q-1) + TS(0,0,q-2) = 35 \cdot TS(q) - 35 \cdot TS(q-1) + TS(q-2) = TS(q+1), q \geq 0$.

Os demais casos seguem de modo semelhante. □

Lema 7. *Para todo terno ordenado de inteiros $(n,m,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, valem as relações:*

(i) $TS(n,m,0) = TS(n) + TS(m)i$, $TS(0,m,q) = TS(m)i + TS(q)j$ *e* $TS(n,0,q) = TS(n) + TS(q)j$*, com i, j unidades imaginárias, tais que $i^2 = j^2 = -1$;*

(ii) $TP(n,m,0) = TP(n) + TP(m)i$, $TP(0,m,q) = TP(m)i + TP(q)j$ *e* $TP(n,0,q) = TP(n) + TP(q)j$*, com i, j unidades imaginárias, tais que $i^2 = j^2 = -1$.*

Demonstração. Para o item i, vamos verificar, que podemos determinar $TS(n,3,0) = 35 \cdot TS(n,2,0) - 35 \cdot TS(n,1,0) + TS(n,0,0) = 35 \cdot (TS(n) + TS(2)i) - 35 \cdot (TS(n) + TS(1)i) + TS(n) = 35 \cdot TS(n) + 35 \cdot TS(2)i - 35 \cdot TS(n) - 35 \cdot TS(1)i + TS(n) = 35 \cdot TS(2)i - 35 \cdot TS(1)i + TS(n) = TS(n) + 35 \cdot 36i - 35i = TS(n) + 1225i + 0j = TS(n) + TS(3)i + TS(0)j$.

Fixado o termo $n \in \mathbb{N}$, empregamos o passo indutivo, assumindo que $q = 0 \therefore TS(n,m+1,0) = 35 \cdot TS(n,m,0) - 35 \cdot TS(n,m-1,0) + TS(n,m-2,0) = 35 \cdot (TS(n) + TS(m)i) - 35 \cdot (TS(n) + TS(m-1)i) + (TS(n) + TS(m-2)i) = 35 \cdot TS(m)i - 35 \cdot TS(m-1)i + TS(m-2)i + TS(n) = TS(n) + TS(m+1)i + TS(0)j$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Para verificarmos o item (ii), basta repetir os argumentos anteriores do item i. □

Lema 8. *Para todo terno ordenado de inteiros $(n,m,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, valem as relações:*

(i) $TS(n,1,1) = TS(n) + TS(1)i + TS(1)j$, $TS(1,m,1) = TS(1) + TS(m)i + TS(1)j$, $TS(1,m,1) = TS(1) + TS(m)i + TS(1)j$ *e* $TS(1,1,q) = TS(1) + TS(1)i + TS(q)j$*, com i, j unidades imaginárias, tais que $i^2 = j^2 = -1$;*

(ii) $TP(n,1,1) = TP(n) + TP(1)i + TP(1)j$, $TP(1,m,1) = TP(1) + TP(m)i + TP(1)j$, $TP(1,m,1) = TP(1) + TP(m)i + TP(1)j$ *e* $TP(1,1,q) = TP(1) + TP(1)i + TP(q)j$*, com i, j unidades imaginárias, tais que $i^2 = j^2 = -1$.*

Demonstração. Considerando o item (ii), empregaremos o passo indutivo sobre a variável $m \in \mathbb{N}$.

Antes, porém, podemos verificar que ocorre $n = q = 1$, $m = 2 \therefore TS(1,3,1) = 35 \cdot TS(1,2,1) - 35 \cdot TS(1,1,1) + TS(1,0,1) = 35 \cdot (1 + 36i + j) - 35 \cdot (1 + i + j) + 1 + j = 35 + 35 \cdot 36i + 35j - 35 - 35i - 35j + 1 + j = 1 + 35 \cdot 36i - 35i + j = 1 + 35 \cdot 35i + j = 1 + 1225i + j = TS(1) + TS(3)i + TS(1)j$.

Para o passo indutivo, considerando que os demais itens são semelhantes, vamos considerar a terceira relação de recorrência

Teremos que $TS(1,1,q+1) = 35 \cdot TS(1,1,q) - 35 \cdot TS(1,1,q-1) + RS(1,1,q-2) = 35 \cdot [TS(1) + TS(1)iTS(q+1)j] - 35 \cdot [TS(1) + TS(1)i + TS(q)j] + [TS(1) + TS(1)i + TS(q)j] = 35 \cdot TS(q+1)j - 35 \cdot TS(q)j + TS(q)j$ para todo $q \geq 1$. □

A partir do Lema 6 podemos verificar que $TS(n,m,m) = TS(n) + TS(m)i + TS(m)j$, quando tomamos $m = q \geq 0$. De modo semelhante, a mesma propriedade para os números triangulares pentagonais.

Teorema 9. *Para todo termo ordenado de inteiros* $(n, m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $TS(n, m, q) = TS(n) + TS(m)i + TS(q)j$ *onde* $i^2 = j^2 = -1$;

(ii) $TP(n, m, q) = TP(n) + TP(m)i + TP(q)j$ *onde* $i^2 = j^2 = -1$.

Demonstração. A partir dos Lemas anteriores, fixaremos as variáveis $(m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e empregaremos indução sobre a primeira variável.

Considerando a primeira relação de recorrência indicada em $TS(n + 1, m, q) = 35 \cdot TS(n, m, q) - 35 \cdot TS(n - 1, m, q) + TS(n - 2, m, q)$. Assim, facilmente, encontraremos que $TS(n+1, m, q) = 35 \cdot (TS(n) + TS(m)i + TS(q)j) - 35 \cdot (TS(n-1) + TS(m)i + TS(q)j) + TS(n-2) + TS(m)i + TS(q)j = 35 \cdot TS(n) - 35 \cdot TS(n-1) + TS(n-2) + TS(m)i + TS(q)j = TS(n + 1) + TS(m)i + TS(q)j$, para todo $n \geq 1$.

O item (ii) segue de modo semelhante. □

Teorema 10. *Para todo termo ordenado de inteiros* $(n, m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *valem as relações:*

(i) $G_{TS(n,m,q)}(x) = \left[\dfrac{x(1 + x)}{(1 - x)(x^2 - 34x + 1)}\right] + \dfrac{TS(m)i + TS(q)j}{1 - x}$, *para todo par de inteiros fixos* $m, q \in \mathbb{N}$;

(ii) $G_{TS(n,m,q)}(x) = \dfrac{TS(n) + TS(q)j}{1 - x} + \left[\dfrac{x(1 + x)}{(1 - x)(x^2 - 34x + 1)}\right] i$, *para todo par de inteiros fixos* $n, q \in \mathbb{N}$;

(iii) $G_{TS(n,m,q)}(x) = \dfrac{TS(n) + TS(m)i}{1 - x} + \left[\dfrac{x(1 + x)}{(1 - x)(x^2 - 34x + 1)}\right] j$, *para todo par de inteiros fixos* $n, m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. No caso (i), para inteiros $m, q \in \mathbb{N}$, escrevemos a soma:

$$
\begin{aligned}
G_{TS(n,m,q)}(x) &= \sum_{t=0}^{\infty} TS(n, m, q) \cdot x^{t-1} = \sum_{t=0}^{\infty} [TS(t) + TS(m) \cdot i + TS(q) \cdot j] x^{t-1} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} [TS(i)] x^{t-1} + \sum_{t=0}^{\infty} [TS(m) \cdot i] x^{t-1} + \sum_{t=0}^{\infty} [TS(q) \cdot j] x^{t-1} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} [TS(i)] x^{t-1} + TS(m) \sum_{t=0}^{\infty} x^{t-1} i + TS(q) \sum_{t=0}^{\infty} x^{t-1} j \\
&= \left[\frac{x(1 + x)}{(1 - x)(x^2 - 34x + 1)}\right] + \frac{TS(m)}{(1 - x)} i + \frac{TS(q)}{(1 - x)} j \\
&= \left[\frac{x(1 + x)}{(1 - x)(x^2 - 34x + 1)}\right] + \frac{TS(m)i + TS(q)j}{1 - x}.
\end{aligned}
$$

No caso (ii) e todo par de inteiros fixos $n, q \in \mathbb{N}$ escrevemos:

$$\begin{aligned} G_{TS(n,m,q)}(x) &= \sum_{t=0}^{\infty} [TS(n) + TS(t) \cdot i + TS(q) \cdot j]\, x^{t-1} \\ &= TS(n) \sum_{t=0}^{\infty} x^{t-1} i + \left[\frac{x(1+x)}{(1-x)(x^2-34x+1)} \right] + TS(q) \sum_{t=0}^{\infty} x^{t-1} i \\ &= \frac{TS(n) + TS(q)j}{1-x} + \left[\frac{x(1+x)}{(1-x)(x^2-34x+1)} \right]. \end{aligned}$$

De modo semelhante, segue o item (iii). $\square$

4. RELAÇÕES n-DIMENSIONAIS PARA O CONJUNTO DOS NÚMEROS $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E FUNÇÃO GERADORA

Para todo termo ordenado de inteiros $(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, definiremos as relações n-dimensionais, considerando o conjunto de unidades imaginárias $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}$ de modo que teremos n equações de recorrência correspondentes com o conjunto $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{cases} TS(m_1+1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ -35 \cdot TS(m_1-1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & + & TS(m_1-2, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ TS(m_1, m_2+1, m_3, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ -35 \cdot TS(m_1, m_2-1, m_3, m_4, \ldots, m_n) & + & TS(m_1, m_2-2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ TS(m_1, m_2, m_3+1, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ -35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3-1, m_4, \ldots, m_n) & + & TS(m_1, m_2, m_3-2, m_4, \ldots, m_n) \\ \vdots & & \\ TS(m_1, m_2, m_3+1, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ -35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n-1) & + & TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n-2), \end{cases} \tag{1}$$

com as seguintes condições iniciais:

$TS(0,0,\ldots,0) = 0, TS(1,0,\ldots,0) = 1, TS(0,1,\ldots,0) = i_1,$
$TS(0,0,1,\ldots,0) = i_2, \ldots, TS(0,0,\ldots,1) = i_{n-1}, TS(1,1,\ldots,0) = 1+i,$
$TS(0,1,1,\ldots,0) = 1+i, TS(0,0,\ldots,1,1) = i_{n-2} + i_{n-1},$
$TS(1,1,1,0,0,\ldots,0) = 1 + i_1 + i_2, TS(2,0,0,\ldots,0) = 36,$
$TS(0,2,0,\ldots,0) = 36i, TS(0,0,2,\ldots,0) = 36i_2, \ldots, TS(2,2,\ldots,2) = 2 + 2i_1 + \ldots + 2i_{n-1}.$

Para todo termo ordenado de inteiros $(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, definiremos as relações n-dimensionais, considerando o conjunto de unidades imaginárias $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}$ de modo que teremos n equações de recorrência correspondentes com o conjunto $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$
\begin{cases}
TP(m_1+1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\
-35 \cdot TP(m_1-1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & + & TP(m_1-2, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\
TP(m_1, m_2+1, m_3, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\
-35 \cdot TP(m_1, m_2-1, m_3, m_4, \ldots, m_n) & + & TP(m_1, m_2-2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\
TP(m_1, m_2, m_3+1, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\
-35 \cdot TS(m_1, m_2, m_3-1, m_4, \ldots, m_n) & + & TP(m_1, m_2, m_3-2, m_4, \ldots, m_n) \\
\vdots & & \\
TP(m_1, m_2, m_3+1, m_4, \ldots, m_n) & = & 35 \cdot TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\
-35 \cdot TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n-1) & + & TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n-2),
\end{cases}
\tag{2}
$$

com as seguintes condições iniciais:

$TP(0,0,\ldots,0) = 0, TP(1,0,\ldots,0) = 1, TP(0,1,\ldots,0) = i_1,$
$TP(0,0,1,\ldots,0) = i_2, \ldots, TP(0,0,\ldots,1) = i_{n-1}, TP(1,1,\ldots,0) = 1+i,$
$TP(0,1,1,\ldots,0) = 1+i, TP(0,0,\ldots,1,1) = i_{n-2}+i_{n-1},$
$TP(1,1,1,0,0,\ldots,0) = 1+i_1+i_2, TP(2,0,0,\ldots,0) = 36,$
$TP(0,2,0,\ldots,0) = 36i, TP(0,0,2,\ldots,0) = 36i_2, \ldots, TP(2,2,\ldots,2) = 2+2i_1+\ldots+2i_{n-1}.$

Teorema 11. *Considerando o sistema de unidades imaginárias* $(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, *vale que:*

- *(i)* $TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) = TS(m_1) + TS(m_2)i_1 + TS(m_3)i_2 + TS(m_4)i_3 + \ldots + TS(m_n)i_{n-1}$;
- *(i)* $TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) = TP(m_1) + TP(m_2)i_1 + TP(m_3)i_2 + TP(m_4)i_3 + \ldots + TP(m_n)i_{n-1}$.

Demonstração. Para todo termo ordenado de inteiros $(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, fixo o inteiro $m_t \geq 0, 2 \leq t \leq n$ e utilizando a última relação de recorrência indicada acima, temos:

$$
\begin{aligned}
TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n+1) &= 35 \cdot [TS(m_1) \\
&+ \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1}] - 35 \cdot [TS(m_1-1) + \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1}] \\
&+ [TS(m_1-2) + \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1}] \\
&= (35 \cdot TS(m_1) - 35 \cdot TS(m_1-1) + TS(m_1-2)) \\
&+ 35 \cdot \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1} - 35 \cdot \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1} + \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1} \\
&= TS(m_1+1) + \sum_{t=1}^{n} TS(m_t)i_{t-1}
\end{aligned}
$$

, para todo $m_1 \geq 0$.

De modo semelhante, verificamos o item (ii). $\square$

Na última seção verificaremos alguns resultados particulares envolvendo representações matriciais, com o emprego de algumas ideias dos trabalhos de Yilmaz e Soyakan (2023) e Yilmaz e Taskara (2013).

Antes, porém, recordamos que, no caso da seguinte relação de recorrência $TS_{n+1} = r \cdot TS_n + s \cdot TS_{n-1} + t \cdot TS_{n-2}$, com os valores $r = 35, s = -35, t = 1$, podemos determinar que $x^3 - 35x^2 + 35x + 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta), \alpha = 17 - 12\sqrt{2}, \beta = 17 + 12\sqrt{2}$.

De modo semelhante, tomando a outra recorrência, consideramos os valores $r = 195, s = -195, t = 1$ determinaremos a seguinte equação $x^3 - 195x^2 + 195x - 1 = (x-1)(x-\gamma)(x-\delta)$, considerando que $\gamma = (97 - 56\sqrt{3}), \delta = (97 + 56\sqrt{3})$.

5. PROPRIEDADES COM MATRIZES DOS NÚMEROS $\{[TS_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{[TP_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$

Vamos considerar a seguinte matriz $\begin{pmatrix} TS_3 \\ TS_2 \\ TS_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} TS_2 \\ TS_1 \\ TS_0 \end{pmatrix}$. Em seguida, admitiremos por indução que $\begin{pmatrix} TS_{n+2} \\ TS_{n+1} \\ TS_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n \geq 0$. Com efeito, basta ver que:

$$\begin{pmatrix} TS_{n+3} \\ TS_{n+2} \\ TS_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot TS_{n+2} - 35 \cdot TS_{n+1} + TS_n \\ 35 \cdot TS_{n+1} - 35 \cdot TS_n + TS_{n-1} \\ 35 \cdot TS_n - 35 \cdot TS_{n-1} + TS_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= 35 \cdot \begin{pmatrix} TS_{n+2} \\ TS_{n+1} \\ TS_n \end{pmatrix} - 35 \cdot \begin{pmatrix} TS_{n+1} \\ TS_n \\ TS_{n-1} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} TS_n \\ TS_{n-1} \\ TS_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= 35 \cdot \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 35 \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}35 & -35 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}36\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}35 & -35 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[35\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-35\begin{pmatrix}35 & -35 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix}35 & -35 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-2}\right]$$

$$\cdot\begin{pmatrix}36\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}35 & -35 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[35\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-35\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -35 & 35\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -35 & 35\\ 35 & -1224 & 1190\end{pmatrix}\right]$$

$$\cdot\begin{pmatrix}36\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}35 & -35 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[\begin{pmatrix}35 & 0 & 0\\ 0 & 35 & 0\\ 0 & 0 & 35\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -35 & 0\\ 0 & 0 & -35\\ -35 & 1225 & -1225\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -35 & 35\\ 35 & -1224 & 1190\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}36\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left[\begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para todo $n \geq 0$.

Em seguida, se repetimos os procedimentos anteriores, para o caso do conjunto dos números $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, encontraremos $\begin{pmatrix} TP_{n+2} \\ TP_{n+1} \\ TP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & -195 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} TP_2 \\ TP_1 \\ TP_0 \end{pmatrix}$, $n \geq 0$.

Lema 12. *Para todo inteiro positivo $n \geq 0$, temos as relações:*

(i) $\begin{pmatrix} TS_{n+2} \\ TS_{n+1} \\ TS_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} TS_2 \\ TS_1 \\ TS_0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} TP_{n+2} \\ TP_{n+1} \\ TP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & -195 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} TP_2 \\ TP_1 \\ TP_0 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} TS_{-n+2} \\ TS_{-n+1} \\ TS_{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} \begin{pmatrix} TS_0 \\ TS_1 \\ TS_2 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} TP_{-n+2} \\ TP_{-n+1} \\ TP_{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 & -195 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} \begin{pmatrix} TP_2 \\ TP_1 \\ TP_0 \end{pmatrix}$;

Demonstração. Para o item (ii), basta substituir na expressão anterior por $-n$. □

Teorema 13. *Para todo termo ordenado de inteiros $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, valem as relações:*

(i) $\begin{pmatrix} TS(n+2,m) \\ TS(n+1,m) \\ TS(n,m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} TS_2 \\ TS_1 \\ TS_0 \end{pmatrix} + TS(m) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} i$, *para todo $m \geq 0$;*

(ii) $\begin{pmatrix} TS(n,m+2) \\ TS(n,m+1) \\ TS(n,m) \end{pmatrix} = TS(n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} TS_2 \\ TS_1 \\ TS_0 \end{pmatrix} i$, *para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Considerando que $TS(n, m) = TS(n) + TS(m)i$.

Em seguida, vamos escrever que (Caglayan, 2019):

$$\begin{pmatrix} TS(n+2,m) \\ TS(n+1,m) \\ TS(n,m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TS(n+2)+TS(m)i \\ TS(n+1)+TS(m)i \\ TS(n)+TS(m)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TS(n+2) \\ TS(n+1) \\ TS(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} TS(m) \\ TS(m) \\ TS(m) \end{pmatrix} i.$$

Pelo lema anterior, encontraremos que $\begin{pmatrix} TS(n+2,m) \\ TS(n+1,m) \\ TS(n,m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} TS_2 \\ TS_1 \\ TS_0 \end{pmatrix} +$ $TS(m)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} i$, para todo $m \geq 0$.

No caso do item (ii), segue o mesmo argumento. □

Teorema 14. *Para todo termo ordenado de inteiros* $(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, *vale que* $\begin{pmatrix} TS(m_1+2, m_2, m_3, m_4, \ldots, , m_n) \\ TS(m_1+1, m_2, m_3, m_4, \ldots, , m_n) \\ TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, , m_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 36 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{t=1}^{n-1} TS(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} i_t$, *para todo* $m_1 \geq 0$.

Demonstração. Basta considerar o teorema anterior. □

Se considerar as matrizes $\begin{pmatrix} r & s & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $[TS(n)_{3\times 3}] = \begin{pmatrix} TS(n+3) & TS(n+1) & TS(n+2) \\ TS(n+2) & TS(n) & TS(n+1) \\ TS(n+1) & TS(n-1) & TS(n) \end{pmatrix}$ e, no caso dos elementos da sequência $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiremos a seguinte matriz de 3ª ordem $[TP(n)_{3\times 3}] = \begin{pmatrix} TP(n+3) & TP(n+1) & TP(n+2) \\ TP(n+2) & TP(n) & TP(n+1) \\ TP(n+1) & TP(n-1) & TP(n) \end{pmatrix}$.

Reparemos que no primeiro caso examinado, consideramos que $(r, s, t) = (35, -35, 1)$, enquanto que, no segundo caso, assumimos que $(r, s, t) = (195, -195, 1)$.

Fixaremos as seguintes matrizes e determinantes: $[TS(1)_{3\times 3}] = \begin{pmatrix} TS(4) & TS(2) & TS(3) \\ TS(3) & TS(1) & TS(2) \\ TS(2) & TS(0) & TS(1) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 41616 & 36 & 1225 \\ 1225 & 1 & 36 \\ 36 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det[TS(1)_{3\times 3}] = 72$.

$$[TP(1)_{3\times3}] = \begin{pmatrix} TP(4) & TP(2) & TP(3) \\ TP(3) & TP(1) & TP(2) \\ TP(2) & TP(0) & TP(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7906276 & 210 & 40755 \\ 40755 & 1 & 210 \\ 210 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det[TP(1)_{3\times3}] = 50176$$

Facilmente constatamos que ocorre a seguinte propriedade:

$$A \cdot [TS(1)_{3\times3}] = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41616 & 36 & 1225 \\ 1225 & 1 & 36 \\ 36 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1413721 & 1225 & 41616 \\ 41616 & 36 & 1225 \\ 1225 & 1 & 36 \end{pmatrix}$$
$$= [TS(2)_{3\times3}]$$

$$A \cdot [TP(1)_{3\times3}] = \begin{pmatrix} 195 & -195 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7906276 & 210 & 40755 \\ 40755 & 1 & 210 \\ 210 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1533776805 & 40755 & 7906276 \\ 7906276 & 210 & 40755 \\ 40755 & 1 & 210 \end{pmatrix} = [TP(2)_{3\times3}]$$

Finalmente, segue o resultado pelo Lema 12.

Teorema 15. *Considerando as matrizes correspondentes aos números* $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *e indicadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[TS(n)_{3\times3}] = \begin{pmatrix} TS(n+3) & TS(n+1) & TS(n+2) \\ TS(n+2) & TS(n) & TS(n+1) \\ TS(n+1) & TS(n-1) & TS(n) \end{pmatrix}$,

$$[TP(n)_{3\times3}] = \begin{pmatrix} TP(n+3) & TP(n+1) & TP(n+2) \\ TP(n+2) & TP(n) & TP(n+1) \\ TP(n+1) & TP(n-1) & TP(n) \end{pmatrix}.$$

Então, valem as seguintes relações:

(i) $[TS(n)_{3\times3}] = A^{n-1} \cdot [TS(1)_{3\times3}]$, $n \geq 1$;

(ii) $[TP(n)_{3\times3}] = A^{n-1} \cdot [TP(1)_{3\times3}]$, $n \geq 1$;

Demonstração. No caso do item (i), basta verificar que $[TS(n+1)_{3\times3}] = A \cdot [TS(n)_{3\times3}]$ e que, quando escrevemos $[TS(n+1)_{3\times3}] = A \cdot [TS(n)_{3\times3}] = A \cdot A^{n-1} \cdot [TS(1)_{3\times3}] = A^n \cdot [TS(1)_{3\times3}]$, para todo inteiro $n \geq 1$.

No caso do item (ii), basta verificar, de modo semelhante, que temos $[TP(n+1)_{3\times3}] = A \cdot [TP(n)_{3\times3}]$.

Por fim, determinaremos que vale a seguinte relação $[TP(n+1)_{3\times 3}] = A\cdot[TP(n)_{3\times 3}] = A\cdot A^{n-1}\cdot[TP(1)_{3\times 3}] = A^n\cdot[TP(1)_{3\times 3}]$. □

Teorema 16. *Considerando as matrizes correspondentes aos números* $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *e indicadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*,teremos:*

(i) $[TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n)_{3\times 3}] = [TS(m_1)_{3\times 3}] + \sum_{k=2}^{n} \begin{pmatrix} TS(m_k) & TS(m_k) & TS(m_k) \\ TS(m_k) & TS(m_k) & TS(m_k) \\ TS(m_k) & TS(m_k) & TS(m_k) \end{pmatrix} i_{k-1}$, *considerando o sistema de unidades imaginárias* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$*;*

(ii) $[TP(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n)_{3\times 3}] = [TP(m_1)_{3\times 3}] + \sum_{k=2}^{n} \begin{pmatrix} TP(m_k) & TP(m_k) & TP(m_k) \\ TP(m_k) & TP(m_k) & TP(m_k) \\ TP(m_k) & TP(m_k) & TP(m_k) \end{pmatrix} i_{k-1}$, *considerando o sistema de unidades imaginárias* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

Demonstração. Basta considerar a seguinte matriz:

$$[TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n)_{3\times 3}]$$

$$= \begin{pmatrix} TS(m_1+3, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & TS(m_1+1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & TS(m_1+2, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ TS(m_1+2, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & TS(m_1+1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \\ TS(m_1+1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & TS(m_1-1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) & TS(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} TS(m_1+3) & TS(m_1+1) & TS(m_1+2) \\ TS(m_1+2) & TS(m_1) & TS(m_1+1) \\ TS(m_1+1) & TS(m_1-1) & TS(m_1) \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^{n} \begin{pmatrix} TS(m_k) & TS(m_k) & TS(m_k) \\ TS(m_k) & TS(m_k) & TS(m_k) \\ TS(m_k) & TS(m_k) & TS(m_k) \end{pmatrix} i_{k-1}$$

De modo semelhante, segue o item (ii). □

Considerando as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[TS(n)_{3\times 3}] = \begin{pmatrix} TS(n+3) & TS(n+1) & TS(n+2) \\ TS(n+2) & TS(n) & TS(n+1) \\ TS(n+1) & TS(n-1) & TS(n) \end{pmatrix}$$

Estabeleceremos a seguinte definição.

Definiçao 17. *Considerando o conjunto de matrizes indicadas por* $\{[TS(n)_{3\times3}]\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Fixando os elementos* $[TS(0)_{3\times3}]$, $[TS(1)_{3\times3}]$ *e* $[TS(2)_{3\times3}]$. *A sequência recorrente de matrizes* 3×3 *triangulares-quadrangular é definida pela seguinte relação indicada por* $[TS(n+1)_{3\times3}] = 35\cdot[TS(n)_{3\times3}] - 35\cdot[TS(n-1)_{3\times3}] + [TS(n-2)_{3\times3}]$, *para* $n\geq 2$.

Definiçao 18. *Considerando o conjunto de matrizes indicadas por* $\{[TP(n)_{3\times3}]\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Fixando os elementos* $[TP(0)_{3\times3}]$, $[TP(1)_{3\times3}]$ *e* $[TP(2)_{3\times3}]$. *A sequência recorrente de matrizes* 3×3 *triangulares-quadrangular é definida pela seguinte relação indicada por* $[TP(n+1)_{3\times3}] = 195\cdot[TP(n)_{3\times3}] - 195\cdot[TP(n-1)_{3\times3}] + [TP(n-2)_{3\times3}]$, *para* $n\geq 2$.

Cabe observar que a recorrência indicada na Definição 17 pode ser generalizada, quando passamos a considerar a introdução de mais variáveis, como indicamos nas relações n dimensionais. Por fim, considerando o trabalho de Yilmaz e Taskara (2013), apresentamos o comportamento das funções geradoras correspondentes.

Teorema 19. *Considerando o o seguinte conjunto dos elementos* $\{[TS(n)_{3\times3}]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *determinados pela recorrência* $[TS_{n+1}] - 35\cdot[TS_n] + 35\cdot[TS_{n-1}] - [TS_{n-2}] = 0$, *então a função geradora é indicada por:*

$$G_{[TS(n)_{3\times3}]} = \frac{[TS(0)_{3\times3}] + ([TS(1)_{3\times3}] - 35[TS(0)_{3\times3}])x + ([TS(2)_{3\times3}] - 35\,[TS(1)_{3\times3}] + 35\,[TS(0)_{3\times3}])x^2}{(1-35x+35x^2-x^3)}$$

Demonstração. Vamos considerar a seguinte soma formal $G_{[TS(n)_{3\times3}]} = \sum_{k=0}^{\infty}[TS(k)_{3\times3}]x^k$.

Em seguida, considerando o polinômio característico correspondente ao conjunto $\{[TS(n)_{3\times3}]\}_{n\in\mathbb{N}}$, que indicamos a seguir $x^3-35x^2+35x+1=0$ e pela recorrência $[TS_{n+1}] - 35\cdot[TS_n] + 35\cdot[TS_{n-1}] - [TS_{n-2}] = 0$, com $n\geq 2$.

Em seguida, determinaremos os termos $-G_{[TS(n)_{3\times3}]}$, $(35x)G_{[TS(n)_{3\times3}]}$, $(-35x^2)G_{[TS(n)_{3\times3}]}$, $(x^3)G_{[TS(n)_{3\times3}]}$.

Agruparemos os termos $(x^3-35x^2+35x-1)G_{[TS(n)_{3\times3}]}$.

Por fim, encontraremos a seguinte expressão:

$$G_{[TS(n)_{3\times3}]} = \frac{[TS(0)_{3\times3}] + ([TS(1)_{3\times3}] - 35[TS(0)_{3\times3}])x + ([TS(2)_{3\times3}] - 35\,[TS(1)_{3\times3}] + 35\,[TS(0)_{3\times3}])x^2}{(1-35x+35x^2-x^3)}$$

□

Teorema 20. *Considerando o seguinte conjunto dos elementos* $\{[TP(n)_{3\times3}]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *determinados pela recorrência* $[TP_{n+1}] - 35\cdot[TP_n] + 35\cdot[TP_{n-1}] - [TP_{n-2}] = 0$, *então a função geradora é indicada por:*

$$G_{[TP(n)_{3\times3}]} = \frac{[TP(0)_{3\times3}] + ([TP(1)_{3\times3}] - 195[TP(0)_{3\times3}])x + ([TP(2)_{3\times3}] - 195\,[TP(1)_{3\times3}] + 195\,[TP(0)_{3\times3}])x^2}{(1-195x+195x^2-x^3)}$$

Demonstração. Vamos considerar a seguinte soma formal $G_{[TP(n)_{3\times3}]} = \sum_{k=0}^{\infty}[TP(k)_{3\times3}]x^k$.

Em seguida, tomando o polinômio $x^3-195x^2+195x-1=0$.

Determinaremos os seguintes termos: $-G_{[TP(n)_{3\times3}]}$, $(195x)G_{[TP(n)_{3\times3}]}$, $(-195x^2)G_{[TP(n)_{3\times3}]}$, $(x^3)G_{[TP(n)_{3\times3}]}$.

Por fim, repetimos os argumentos do Teorema 19. □

Para finalizar, quando consideramos o conjunto $\left\{[TS(n)]_{3\times3}\right\}$, podemos determinar facilmente a seguinte decomposição $x^3 - 35x^2 + 35x - 1 = (x-\alpha_1)(x-\beta_1)(x-\gamma_1)$, considerando as raízes $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 17+12\sqrt{2}, \gamma_1 = 17-12\sqrt{2}$. De modo semelhante, quando tomamos o conjunto $\left\{[TP(n)]_{3\times3}\right\}$, assim, determinaremos a seguinte decomposição $x^3 - 195x^2 + 195x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, considerando as seguinte raízes $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 97+56\sqrt{3}, \gamma_1 = 97-56\sqrt{3}$.

A partir do trabalho do Yilmaz e Soyakan (2020), poderemos determinar a fórmula de Binet para ambos os casos, quando consideramos o caso das sequências matriciais.

Teorema 21. *Para todo inteiro $n \geq 0$, teremos as seguintes fórmulas de Binet:*

(i) $W_{[TS(n)_{3\times3}]} = \dfrac{p_{11}\alpha_1^n}{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\gamma_1)} + \dfrac{p_{21}\beta_1^n}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\gamma_1)} + \dfrac{p_{31}\gamma_1^n}{(\gamma_1-\alpha_1)(\gamma_1-\beta_1)}$, *considerando os termos:*

$$\begin{aligned}
p_{11} &= [TS(2)_{3\times3}] - (\beta_1+\gamma_1)\,[TS(1)_{3\times3}] + \beta_1\gamma_1\,[TS(0)_{3\times3}] \\
p_{21} &= [TS(2)_{3\times3}] - (\alpha_1+\gamma_1)\,[TS(1)_{3\times3}] + \alpha_1\gamma_1\,[TS(0)_{3\times3}] \\
p_{31} &= [TS(2)_{3\times3}] - (\alpha_1+\beta_1)\,[TS(1)_{3\times3}] + \alpha_1\beta_1\,[TS(0)_{3\times3}]
\end{aligned}$$

(ii) $W_{[TP(n)_{3\times3}]} = \dfrac{p_{12}\alpha_2^n}{(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_2-\gamma_2)} + \dfrac{p_{22}\beta_2^n}{(\beta_2-\alpha_2)(\beta_2-\gamma_2)} + \dfrac{p_{32}\gamma_2^n}{(\gamma_2-\alpha_2)(\gamma_2-\beta_2)}$, *considerando os termos:*

$$\begin{aligned}
p_{12} &= [TP(2)_{3\times3}] - (\beta_2+\gamma_2)\,[TP(1)_{3\times3}] + \beta_2\gamma_2\,[TP(0)_{3\times3}] \\
p_{22} &= [TP(2)_{3\times3}] - (\alpha_2+\gamma_2)\,[TP(1)_{3\times3}] + \alpha_2\gamma_2\,[TP(0)_{3\times3}] \\
p_{32} &= [TP(2)_{3\times3}] - (\alpha_2+\beta_2)\,[TP(1)_{3\times3}] + \alpha_2\beta_2\,[TP(0)_{3\times3}]
\end{aligned}$$

Demonstração. Podemos observar que, a partir do trabalho de Yilmaz e Soyakan (2020), poderemos escrever a seguinte fórmula, para ambos os casos, da seguinte maneira $W_n = A_1\alpha^n + A_2\beta^n + A_3\gamma^n$. o que, na literatura correspondente, denominamos por fórmula de Binet.

No caso do item (i), basta considerar o conjunto $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 17+12\sqrt{2}, \gamma_1 = 17-12\sqrt{2}$.

Em seguida, determinamos o comportamento dos coeficientes $\{p_{11}, p_{21}, p_{31}\}$.

De modo semelhante, determinaremos a fórmula de Binet para o item (ii).

□

6. CONCLUSÕES

No presente trabalho introduzimos um conjunto de variáveis $(m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ visando determinar relações de recorrência correspondentes aos conjuntos de números $\{TS_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{TP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ao considerar o caso dos números triangulares quadrados (*triangular-square numbers*) e os números triangulares pentagonais (*triangular pentagonal numbers*) aprensentamos ainda algumas propriedades, tais como: a função geradora e o comportamento da matriz geradora. Finalmente, a partir da introdução de certas definições, podemos descrever propriedades correspondentes que envolvem a recorrências na forma matricial, que indicamos por $[TS(n)_{3\times3}]_{n\in\mathbb{N}}$ e $[TP(n)_{3\times3}]_{n\in\mathbb{N}}$.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o apoio financeiro no Brasil do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

A segunda autora agradece o apoio financeiro no Brasil da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Funcap.

A terceira autora agradece ao apoio financeiro de Portugal dos Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

7. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. História da matemática: números figurais 2d e 3d. **Revista Conexões, Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 40–55, 2012.

BOUROUBI, S. On the square-triangular numbers and balancing-numbers. **Rostock. Math. Kolloq**, v. 72, n. 3, p. 73–80, 2020.

CAGLAYAN, G. Relationship of triangular and star numbers. **Mathematics Magazine**, v. 95, n. 5, p. 1–5, 2019.

DEZA, H.; DEZA, M. M. **Figurate Numbers**. [S.l.]: London: World Scientific, 2012.

DICKSON, L. E. **History of the Theory of Numbers**. [S.l.]: Strechert, New York, 1971.

HARMAN, C. J. Complex fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterlly**, v. 19, n. 1, p. 82–86, 1981.

SILVERMAN, J. H. **A Friendly Introduction to Number Theory**. [S.l.]: Amazon, 2012. v. 4.

SIVARAMAN, R. Octagonal – pentagonal numbers and an interesting puzzle. **Bulletin of Mathematics and Statistics research**, v. 10, n. 1, p. 16–20, 2022a.

SIVARAMAN, R. Square – pentagonal numbers. **International Journal of Multidisciplinary Research and Modern Education**, v. 8, n. 1, 2022b.

YILMAZ, B.; SOYAKAN, Y. A study on generalized (r; s; t)-numbers. **MathLab Journal**, v. 7, n. 1, p. 109–129, 2020.

YILMAZ, B.; SOYAKAN, Y. Gaussian generalized guglielmo numbers. **Asian Journal of Advanced Research and Reports**, v. 17, n. 121, p. 1–18, 2023.

YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of padovan and perrin numbers. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, p. 1–7, 2013.