

1 Bissetrizes: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas 2 Internacionais de Matemática

3 *Bisectors: five solved problems from the International Mathematics Olympiad lists*

4 *Bisectrices: cinco problemas resueltos de las listas de la Olimpiada Internacional de Matemáticas*

5 **Juan López Linares**

6 <jlopez@usp.br>

7 Universidade de São Paulo, Pirassununga, S.P., Brasil



8 <<https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>>

9 Lattes <<http://lattes.cnpq.br/5290499079222806>>

10 **Resumo**

11 *Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática são discutidos em detalhe. Apresenta-se*
12 *uma introdução dos conteúdos relativos a bissetrizes. As demonstrações envolvidas nas soluções são complemen-*
13 *tadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas, utilizando o GeoGebra. É esperado que o*
14 *artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou*
15 *internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e interessem-se em problemas mais desafiadores.*

16 **Palavras-chave:** *Olimpíadas internacionais de Matemática. Bissetrizes. Problemas resolvidos. Ensino Médio e*
17 *Universitário. Geometria.*

18 **Abstract**

19 *Five problems proposed for the International Mathematics Olympiad are discussed in detail. An introduction to*
20 *the contents relating to bisectors is presented. The demonstrations involved in the solutions are complemented by*
21 *the availability of the respective links to the interactive figures, using GeoGebra. It is expected that the article can*
22 *be appreciated both by students preparing for the final stages of national or international competitions, and by*
23 *teachers who work in teaching and are interested in more challenging problems.*

24 **Keywords:** *International Mathematics Olympiads. Bisectors. Problems resolved. High School and University.*
25 *Geometry.*

26 **Resumen**

27 *Se analizan en detalle cinco problemas propuestos para la Olimpiada Internacional de Matemáticas. Se presenta una*
28 *introducción a los contenidos relacionados con las bisectrices. Las demostraciones involucradas en las soluciones*
29 *se complementan con la disponibilidad de los respectivos enlaces a las figuras interactivas, utilizando GeoGebra.*
30 *Se espera que el artículo pueda ser apreciado tanto por estudiantes que se preparan para las etapas finales de*
31 *competencias nacionales o internacionales, como por profesores que trabajan en la docencia y están interesados*
32 *em problemas más desafiantes.*

33 **Palabras-Clave:** *Olimpíadas Internacionales de Matemáticas. Bisectrices. Problemas resueltos. Escuela Secundaria*
34 *y Universidad. Geometría.*

1. INTRODUÇÃO

Os teoremas da Bissetriz Interna e Externa, assim como da divisão harmônica, são pilares fundamentais para o estudo da Geometria. Neste artigo são resolvidos cinco problemas envolvendo estes, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os mesmos foram propostos na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad). Embora úteis, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas olímpicos não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções encontram-se frequentemente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as discussões no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Um artigo da área de Educação Matemática (PEREIRA; SILVA, 2020) fez uma pesquisa bibliográfica das investigações realizadas a respeito de Bissetriz. Os resultados mostraram que a noção de lugar geométrico é pouco detalhada. Outras pesquisas apontaram que o ensino de Geometria Plana, utilizando o software GeoGebra, proporciona ricas possibilidades de visualização do processo de aprendizagem que são difíceis de serem trabalhadas em um ambiente comum (Silva, 2018), (Menegalli; Brandl, 2022), (Ferreira, 2010), (Pereira, 2012) e (Cruz; Filho, 2019).

Para o leitor iniciante recomenda-se consultar os livros de Geometria (Neto, 2013), (Dolce, 2013) e (Barbosa, 2007). De muita utilidade são as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda (Holanda, 2011), do Prof. Rodrigo Pinheiro (Pinheiro, 2006) e do Prof. Cícero Thiago (Thiago, 2006). Também serviram como referência os livros de Geometria Analítica (Frensel; Crissaff, 2017) e Matemática Discreta (Morgado; Carvalho, 2015) adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre a Desigualdade de Ptolomeu (Linares et al., 2022), Trigonometria (Linares; Bruno-Alfonso, 2023) e Áreas (Linares, 2024). Na Seção 2 é feita uma breve introdução de alguns conceitos básicos, utilizados neste trabalho. O leitor já familiarizado com a teoria pode passar diretamente para a Seção 3, onde são enunciados e resolvidos cinco problemas IMO.

2. ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS UTILIZADOS NESTE TRABALHO

Teorema 1 (Teorema da Bissetriz Interna). *A Figura 1 mostra um triângulo ABC. A bissetriz interna AP do $\angle A$ divide internamente o lado oposto BC na razão:*

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP}, \tag{1}$$

em que P é o ponto de interseção da bissetriz interna com o lado BC.

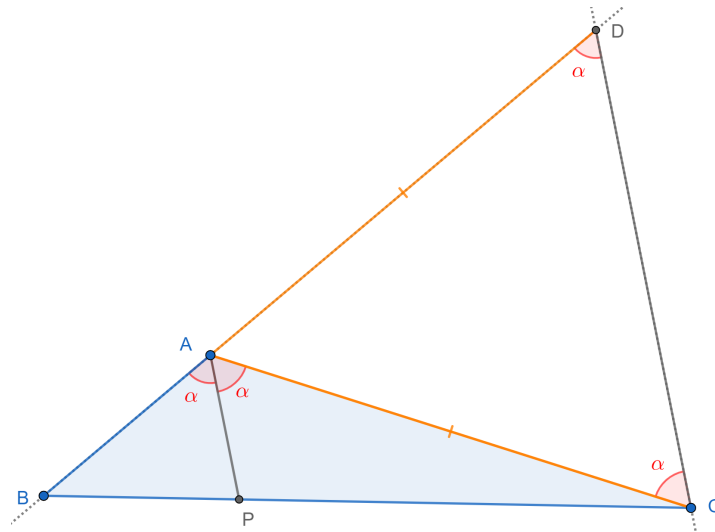


Figura 1. Guia para a demonstração do Teorema 1. Versão interativa aqui.

71 **Prova.** Traça-se a reta AB e uma reta paralela a AP passando por C . Chama-se D o ponto de
 72 interseção destas. Como $AP \parallel CD$, por alternos internos, segue que:

$$\angle PAC = \angle ACD = \alpha$$

73 e, por Correspondentes, tem-se:

$$\angle BAP = \angle ADC = \alpha.$$

74 De $\angle ACD = \angle ADC$ encontra-se que o $\triangle ACD$ é isósceles de base CD . Logo,

$$CA = DA.$$

75 Pelo Teorema de Tales vale que:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BP}{CP}.$$

76 Mas $AD = AC$, portanto,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP}.$$

77 **Teorema 2** (Teorema da Bissetriz Externa). Seja ABC um triângulo não isósceles e AQ , como
 78 $Q \in BC$, a bissetriz externa do $\angle A$ (Figura 2). Então vale que:

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BQ}{CQ}. \tag{2}$$

79

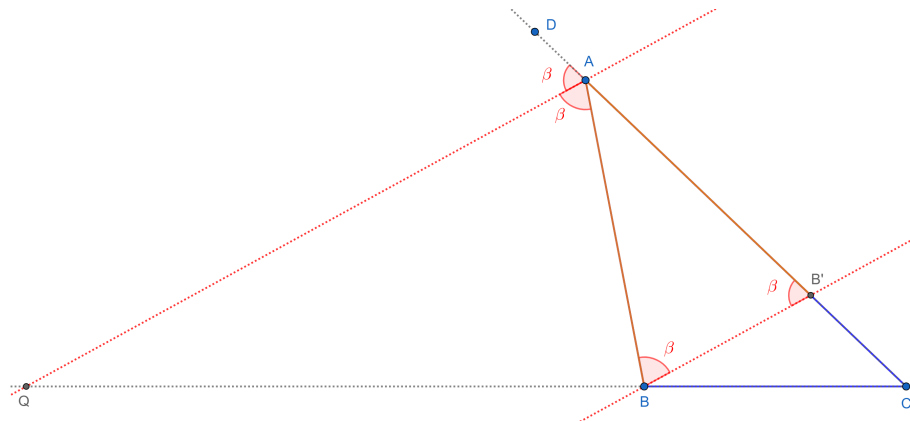


Figura 2. Guia para a demonstração do Teorema 2. Versão interativa aqui.

80 **Prova.** Sem perda de generalidade considera-se o caso em que $AC > AB$. Traça-se uma reta
81 paralela a AQ passando por B . Chama-se B' ao ponto de interseção desta com AC .

82 Seja o ponto $D \in AC$ e além de A . Como $QA \parallel BB'$ valem as igualdades:

$$\angle QAB = \angle ABB' = \beta \quad (\text{Alternos Internos}),$$

83

$$\angle DAQ = \angle AB'B = \beta \quad (\text{Correspondentes}).$$

84 Como $\angle ABB' = \angle AB'B$ o triângulo ABB' é isósceles de base BB' e $AB = AB'$. Pelo
85 Teorema de Tales tem-se:

$$\frac{B'A}{CA} = \frac{BQ}{CQ}.$$

86 Ou seja,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BQ}{CQ}.$$

87 **Teorema 3** (Teorema da Bissetriz). Sejam ABC um triângulo não isósceles, P o ponto de
88 interseção da bissetriz interna do $\angle A$ com o lado BC e AQ , como $Q \in BC$, a bissetriz externa
89 do $\angle A$. Então vale que:

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ}. \quad (3)$$

90

91 **Prova.** O resultado segue das equações (1) e (2).

92 **Proposição 4.** A Figura 3 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro e I_a o centro da
93 ex-circunferência correspondente ao lado BC . Seja E o ponto de interseção de AI com a circun-
94 ferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Então,

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

95

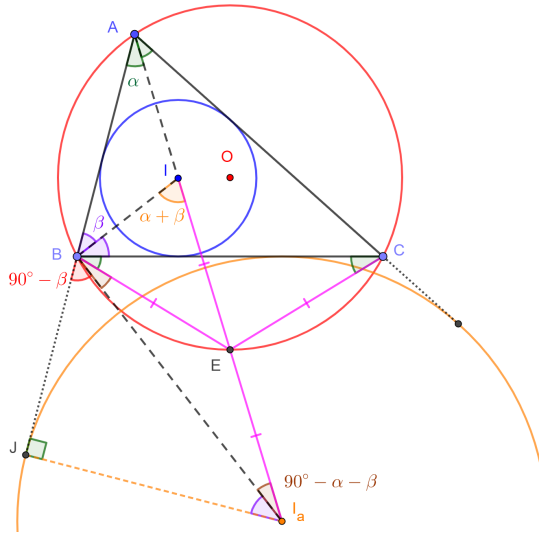


Figura 3. Guia para a demonstração da Proposição 4. Versão interativa aqui.

96 **Prova.** Pela bissetriz em A e o quadrilátero inscrito $ACEB$ tem-se:

$$\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha.$$

97 Portanto, o $\triangle EBC$ é isósceles, de base BC , e $EB = EC$. Além disso, da bissetriz em B ,
98 sejam $\angle IBA = \angle IBC = \beta$. Pela propriedade do ângulo externo,

$$\angle BIE = \alpha + \beta.$$

99 Segue que, $\angle BIE = \angle IBE$, o $\triangle EBI$ é isósceles, de base BI , e $EB = EI$. Pela bissetriz
100 externa em B , sejam

$$\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma.$$

101 Como o $\angle JBA = 180^\circ$ tem-se que $\gamma = 90^\circ - \beta$. Do $\triangle BJI_a$, retângulo em J , tem-se
102 $\angle JI_aB = \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AJI_a$ e o ângulo raso em B encontra-se:

$$\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

103 Isto é, o $\triangle EBI_a$ é isósceles, de base BI_a , e $EB = EI_a$. Conclui-se que:

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

104 Inspirada na segunda igualdade da (3) é feita a definição a seguir.

105 **Definição 5** (Divisão Harmônica). Seja um segmento BC . Os pontos P (no interior do segmento
106 BC) e Q (na reta BC , mas no exterior do mesmo segmento) dividem harmonicamente o
107 segmento BC quando:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ} = k. \quad (4)$$

108 Onde k é um número real não negativo e $k \neq 1$. Os pontos P e Q também são chamados de
109 conjugados harmônicos do segmento BC na razão k .

110 Quando $k = 1$ ($BP = CP$) o ponto P é o ponto médio do segmento BC e o ponto Q está
 111 no infinito. A Figura 4 permite acompanhar a dedução que segue.



Figura 4. Divisão harmônica. Guia para o caso $0 \leq k < 1$ ($BP < CP$). Versão interativa aqui.

112 Quando $k = 0$ vale que $BP = BQ = 0$. Isto é, os pontos P e Q coincidem no ponto B . Se
 113 $0 < k < 1$, então:

$$PB + PC = BC, \tag{5}$$

$$QC = QB + BC. \tag{6}$$

Da equação (4) obtêm-se:

$$PB = k \cdot PC, \tag{7}$$

$$QB = k \cdot QC. \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (5) e (6), respectivamente, encontra-se:

$$PC = \frac{1}{1+k} BC, \tag{9}$$

$$QC = \frac{1}{1-k} BC. \tag{10}$$

Adicionalmente, substituindo (9) e (10) em (5) e (6), respectivamente, obtêm-se:

$$PB = \frac{k}{1+k} BC, \tag{11}$$

$$QB = \frac{k}{1-k} BC. \tag{12}$$

Da soma de (11) e (12) chega-se em:

$$QP = \frac{2k}{1-k^2} BC. \tag{13}$$

A Figura 5 permite acompanhar a dedução que segue.

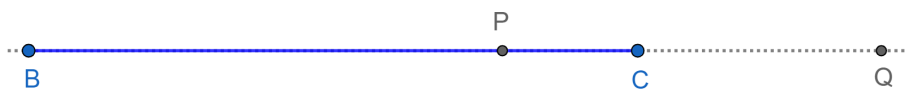


Figura 5. Divisão harmônica. Guia para o caso $k > 1$ ($BP > CP$). Versão interativa aqui.

123 Se $k > 1$, então:

$$PB + PC = BC, \quad (14)$$

124

$$QB = QC + BC. \quad (15)$$

125 Da equação (4) obtêm-se:

$$PB = k \cdot PC, \quad (16)$$

126

$$QB = k \cdot QC. \quad (17)$$

127 Substituindo (16) e (17) em (14) e (15), respectivamente, encontra-se:

$$PC = \frac{1}{1+k} BC, \quad (18)$$

128

$$QC = \frac{1}{k-1} BC. \quad (19)$$

129 Adicionalmente, substituindo (18) e (19) em (14) e (15), respectivamente, obtêm-se:

$$PB = \frac{k}{1+k} BC, \quad (20)$$

130

$$QB = \frac{k}{k-1} BC. \quad (21)$$

131 Da soma de (18) e (19) chega-se em:

$$QP = \frac{2k}{k^2-1} BC. \quad (22)$$

132 **Definição 6** (Inversão de ponto). Dados um plano l , uma circunferência $i \in l$, com centro O e
 133 raio r , e um ponto $P \in l$, o ponto P' que pertence a semirreta OP e satisfaz

$$OP' \cdot OP = r^2$$

134 é chamado inverso de P em relação a i (Figura 6). O ponto O é chamado “centro de inversão” e
 135 i é chamada de “circunferência de inversão”. Também utiliza-se a notação

$$P' = Inv(P, i).$$

136

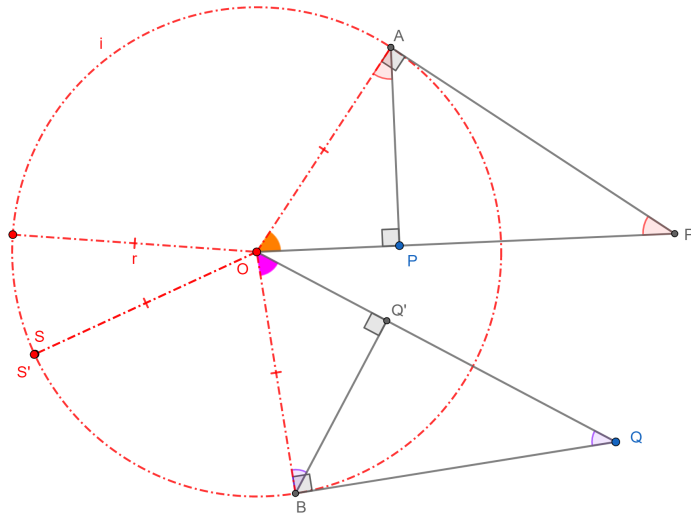


Figura 6. Ilustração da Definição 6 e da construção dos pontos inversos P' e Q' . Quando $S \in i \Rightarrow S' = S$. Versão interativa aqui.

137 **Definição 7** (Polo e Polar). Considera-se uma circunferência de inversão i de centro O e os
 138 pontos pares de inversão P e P' . A reta g , perpendicular a OP' passando por P' , é chamada
 139 Polar de P e o ponto P é denominado Polo de g (Figura 7).

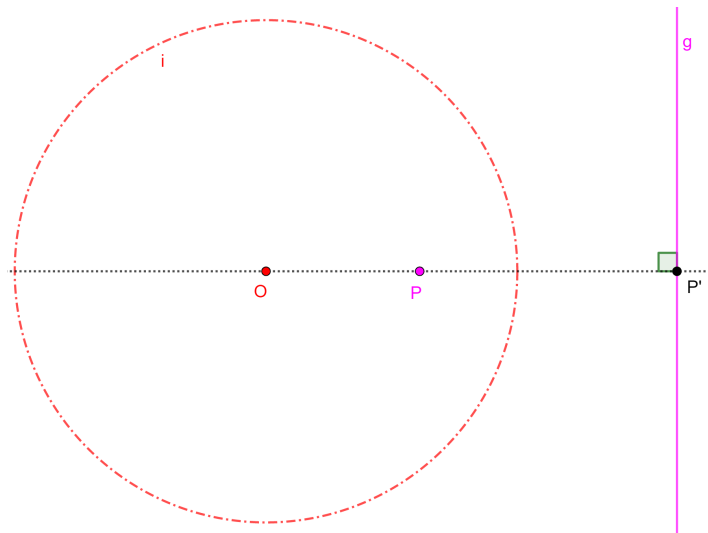


Figura 7. Guia para a Definição 7. Versão interativa aqui.

140 **Teorema 8** (La Hire). Com referência a Figura 8, o ponto Q está na Polar de P (reta g) se, e
 141 somente se, P está na Polar de Q (reta k).

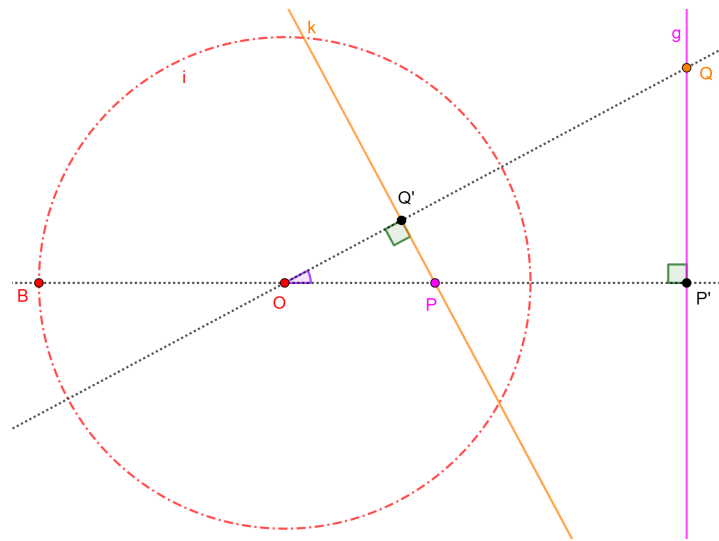


Figura 8. Guia para a demonstração do Teorema 8. Versão interativa aqui.

142 **Prova.** Considera-se inicialmente que $Q \in g$, e g é a Polar do Polo P , quer-se provar que $P \in k$,
 143 sendo k Polar do Polo Q . Da definição de inversão

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = OB^2$$

144 e o ângulo comum $\angle Q'OP = \angle P'OQ$ tem-se, pelo critério de semelhança LAL, que:

$$\triangle OP'Q \sim \triangle OQ'P.$$

145 Logo, $\angle OQ'P = \angle OP'Q = 90^\circ$. Ou seja, $P \in k$. A prova da recíproca é análoga.

146 **Corolário 9** (Dualidade entre polares concorrentes e polos colineares). Com referência a Figura 9,
 147 seja $C = k \cap g$. Se três pontos (Polos) são colineares, por exemplo P, Q e C' , então suas Polares,
 148 g, k e n , são concorrentes e vice-versa.

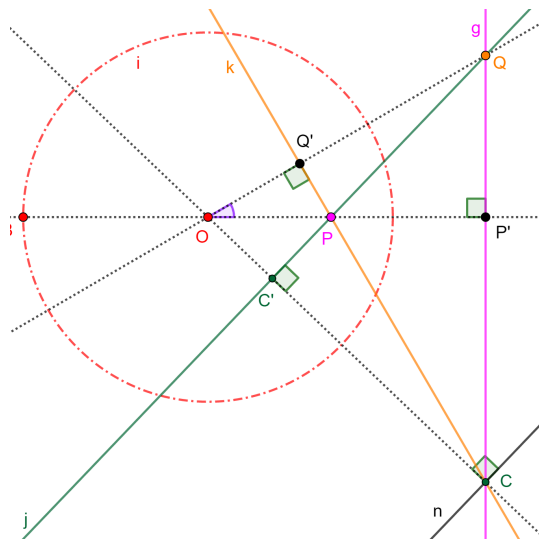


Figura 9. Guia para a demonstração do Corolário 9. Versão interativa aqui.

149 **Prova.** Pelo Teorema 8 (La Hire) a Polar j do Polo C deve passar por P e Q . Assim como a Polar
 150 n de C' passa por C .

151 **Teorema 10** (Brocard). Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito numa circunferência γ de centro
 152 O . Sejam os pontos $Z = AB \cap CD$, $Y = AD \cap BC$ e $P = AC \cap BD$. Então a reta YP é
 153 a polar de Z relativo a γ e a reta PZ é a polar de Y relativo a γ . Ou seja, O é ortocentro do
 154 $\triangle ZYP$ (Figura 10).

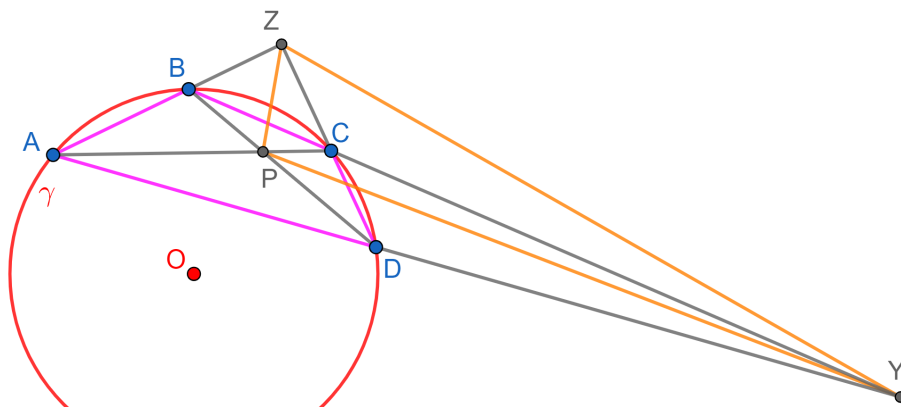


Figura 10. Ilustração do Teorema 10 (Brocard). Versão interativa aqui.

155 **Prova.** Sejam os pontos Q e S as interseções das tangentes em A e B e C e D , respectivamente
 156 (Figura 11). Pelo Teorema de Brianchon para quadriláteros os pontos Q, P, S e Y são colineares.
 157 Como os pontos Q e S são os polos das retas polares AB e DC e $Z = AB \cap DC$, então,

158 pelo Teorema 8 (La Hire), a reta QS , que coincide com a reta YP , é polar do ponto Z . Ou seja,
 159 $\text{Inv}(Z, \gamma) = Z' \in YP, O \in ZZ'$ e $\angle YZ'Z = 90^\circ$.

160 Analogamente, sejam os pontos R e L as interseções das tangentes em A e D e B e C ,
 161 respectivamente. Pelo Teorema de Brianchon para quadriláteros os pontos R, Z, L e P são
 162 colineares. Como os pontos R e L são os polos das retas polares AD e BC e $Y = AD \cap BC$,
 163 então, pelo Teorema 8 (La Hire), a reta RL , que coincide com a reta ZP , é polar do ponto Y . Ou
 164 seja, $\text{Inv}(Y, \gamma) = Y' \in PZ, O \in YY'$ e $\angle YY'Z = 90^\circ$. Portanto, O é ortocentro do $\triangle ZYP$

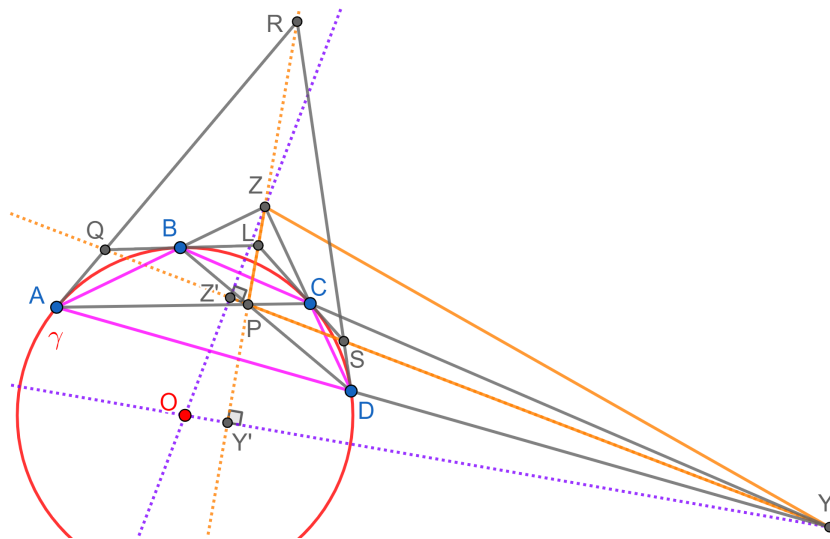


Figura 11. Demonstração do Teorema 10 (Brocard). Versão interativa aqui.

165 **Proposição 11** (Divisão harmônica de ponto sobre polar). Seja i uma circunferência de raio r e
 166 centro O . Deixa-se P ser um ponto arbitrário e p sua reta polar. Considera-se uma reta g que
 167 passa por P e que intercepta i nos pontos C e D . Seja ainda o ponto $Q = p \cap g$ (Figura 12).
 168 Então os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento CD . Isto é, vale:

$$\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QC}.$$

169

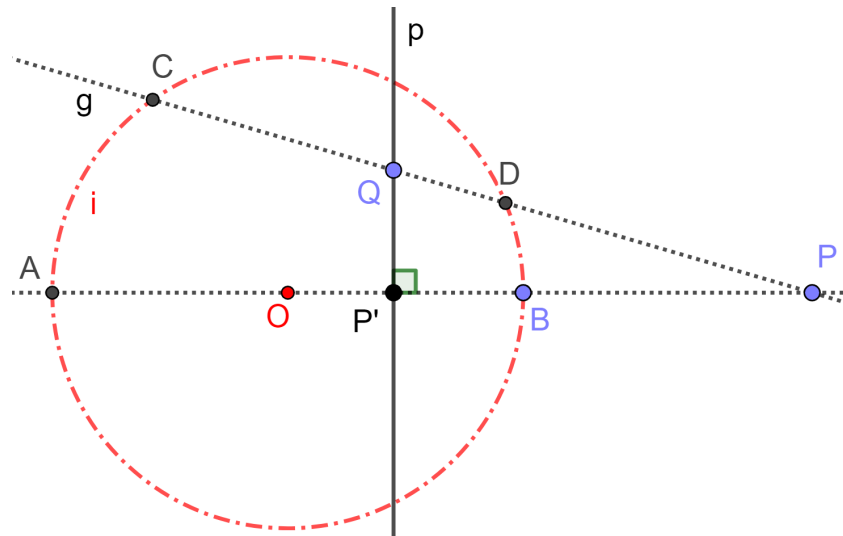


Figura 12. Ilustração da Proposição 11. Versão interativa aqui.

170 O ponto P pode estar dentro ou fora da circunferência. Uma demonstração utilizando
 171 geometria analítica está disponível aqui.

3. PROBLEMAS OLÍMPICOS RESOLVIDOS

172 A seguir abordamos um problema da IMO 1959, realizada na cidade de Bucareste, capital
 173 da Romênia. Este é o P5 da competição, proposto pela delegação da Romênia (Djukic *et al.*,
 174 2011). Neste exploramos os conceitos de bissetriz, semelhança e lugar geométrico.

175 **Problema 1.** *É dado um segmento AB e nele um ponto M . Do mesmo lado de AB são construídos*
 176 *os quadrados $AMCD$ e $BMFE$. As circunferências circunscritas dos dois quadrados, cujos*
 177 *centros são P e Q , cruzam-se em M e N . (a) Provar que as retas FA e BC interceptam-se em*
 178 *N . (b) Provar que todas as retas MN passam por um ponto S , independentemente da seleção*
 179 *de M . (c) Encontrar o lugar geométrico dos pontos médios de todos os segmentos PQ , à medida*
 180 *que M varia ao longo do segmento AB .*

181 A Figura 13 mostra uma construção geométrica inicial.

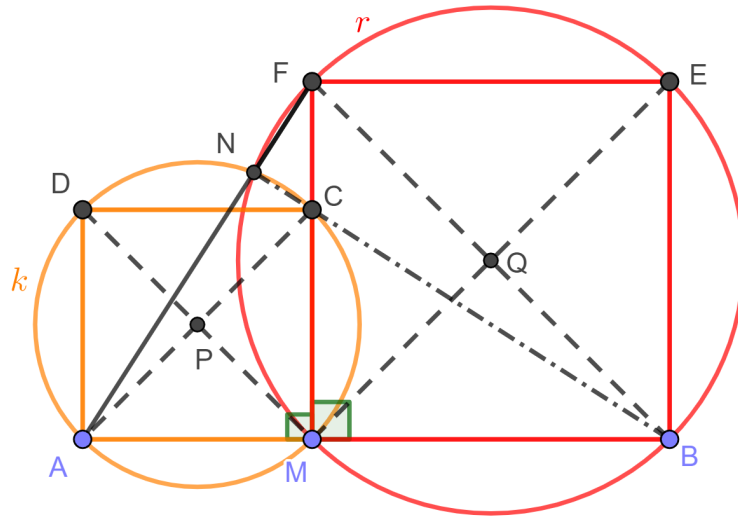


Figura 13. Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa aqui.

182 (a) Como $AM = MC$, $\angle FMA = \angle BMC = 90^\circ$ e $MF = MB$, pelo critério de congruên-
 183 cia LAL, segue:

$$\triangle FMA \equiv \triangle BMC.$$

184 Isto é, uma rotação de 90° , centrada no ponto M , transforma o $\triangle BMC$ no $\triangle FMA$. Sendo
 185 que o segmento BC gira 90° para virar o segmento FA tem-se que:

$$\angle CNF = 90^\circ.$$

186 Adicionalmente, AC e BF são diâmetros das circunferência k e r circunscritas aos quadra-
 187 dos $AMCD$ e $MBEF$, respectivamente. Logo,

$$\angle ANC = \angle BNF = 90^\circ.$$

188 Os resultados anteriores e N ponto comum de k e r levam a $N = AF \cap BC$.

189 (b) Como BF é diâmetro no quadrado $MBEF$, segue que $\angle MFB = 45^\circ$ (Figura 14). O
 190 quadrilátero $BMNF$ está inscrito em r , logo

$$\angle MNB = \angle MFB = 45^\circ.$$

191 De $\angle ANC = 90^\circ$ segue que:

$$\angle ANM = \angle MNB = 45^\circ.$$

192 Ou seja, a reta MN é bissetriz do $\angle ANB$. Sendo MN bissetriz intercepta, pela segunda vez,
 193 a circunferência circunscrita s do $\triangle ABN$ num ponto fixo S tal que $AS = BS$ (Proposição 4).
 194 Isto é, a localização de S não depende da posição de M em AB . A versão interativa da figura a
 195 seguir permite verificar esse fato.

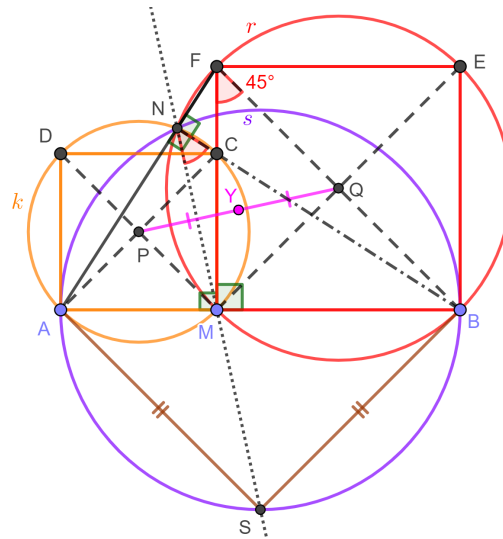


Figura 14. Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui.

196 (c) Neste item serão utilizados conhecimentos de Geometria Analítica. Seja $0 \leq t \leq 1$ um
 197 parâmetro real. Suponha-se que as coordenadas cartesianas dos pontos A , M e B sejam:

$$A = (0, 0),$$

$$198 M = (t, 0),$$

$$199 B = (1, 0).$$

200 A posição dos centros P e Q dos quadrados $AMCD$ e $MBEF$, respectivamente, será:

$$P = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right) = (P_x, P_y),$$

$$201 Q = \left(t + \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2} \right) = \left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} \right) = (Q_x, Q_y).$$

202 Seja Y o ponto médio do segmento PQ . Então calcula-se:

$$Y = \left(\frac{P_x + Q_x}{2}, \frac{P_y + Q_y}{2} \right),$$

$$203 Y = \left(\frac{1+2t}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

204 Isto é, o lugar geométrico do ponto Y é um segmento de reta entre os pontos:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad (t = 0),$$

$$205 \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad (t = 1).$$

206 O segundo problema discutido é da IMO 1965, realizada na cidade de Berlim, capital da
 207 Alemanha. Este é o P5 da competição, proposto pela delegação da Romênia (Djukic et al., 2011).
 208 Neste exploramos o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos.

209 **Problema 2.** Dado um triângulo OAB tal que $\angle AOB < 90^\circ$, seja $M \neq O$ um ponto arbitrário do
 210 triângulo. Denotam-se por P e Q os pés das perpendiculares de M a OA e OB , respectivamente.
 211 Seja H o ortocentro do $\triangle OPQ$. Encontrar o lugar geométrico dos pontos H quando: (a) M
 212 pertence ao segmento AB ; (b) M pertence ao interior do $\triangle OAB$.

213 A Figura 15 ilustra uma construção geométrica para o item (a).

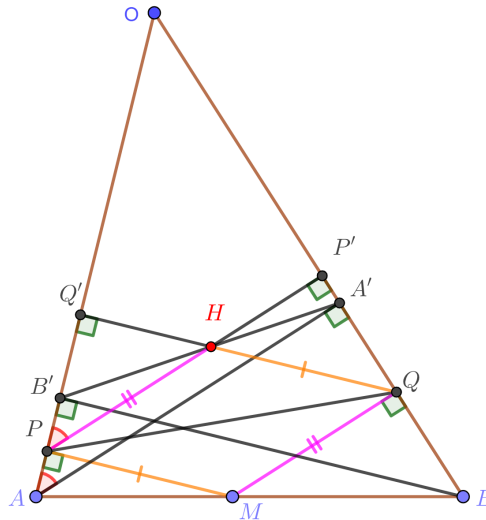


Figura 15. Uma construção geométrica para o item (a) do Problema 2. Versão interativa aqui.

214 Sejam P' e Q' os pés das alturas dos pontos P e Q relativos aos lados OB e OA , respec-
 215 tivamente. Analogamente, sejam A' e B' os pés das alturas dos pontos A e B relativos aos
 216 lados OB e OA , respectivamente. Pela definição de ortocentro tem-se que $H = PP' \cap QQ'$.
 217 Intuitivamente verifica-se que, quando $M = A$, então $P = M = A$ e $Q = P' = A' = H$.
 218 Adicionalmente, quando $M = B$, então $Q = M = B$ e $P = Q' = B' = H$. Isto leva a
 219 conjecturar que $H \in A'B'$.

220 Por serem perpendiculares ao lado OA segue que $PM \parallel B'B \parallel Q'Q$. Analogamente,
 221 sendo perpendiculares ao lado OB encontra-se que $QM \parallel A'A \parallel P'P$. Pela ida do Teorema de
 222 Tales para as transversais AB' e AB vale:

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA}.$$

223 Pela semelhança $\triangle BMQ \sim \triangle BAA'$ encontra-se:

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AA'}.$$

224 Nota-se ainda que o quadrilátero $MPHQ$ é um paralelogramo. Isto é, $MP = QH$ e
 225 $MQ = PH$. Ou seja,

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AA'} = \frac{PH}{AA'},$$

226

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{PH}{AA'}$$

227 A última equação e $\angle HPB' = \angle A'AB'$ ($PH \parallel AA'$) levam, pelo critério de semelhança
 228 LAL, a $\triangle HPB' \sim \triangle A'AB'$. Portanto, $H \in A'B'$. Em outras palavras, o lugar geométrico dos
 229 pontos H quando M pertence ao segmento AB é o segmento $A'B'$.

230 A Figura 16 ilustra uma construção geométrica para o item (b). Pelo resultado discutido no
 231 item (a), quando M está em qualquer lugar do interior do $\triangle OAB$, então o lugar geométrico
 232 dos pontos H é no interior do $\triangle OA'B'$.

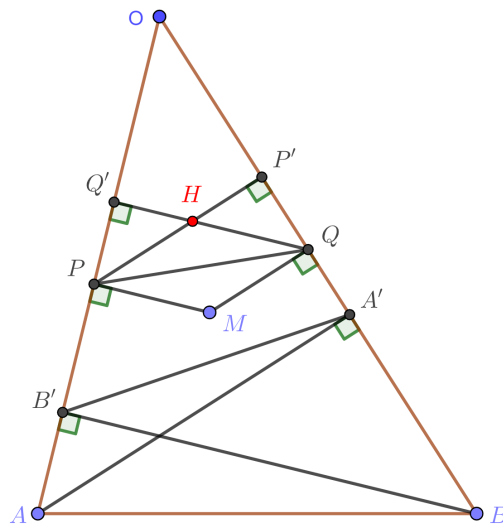


Figura 16. Uma construção geométrica para o item (b) do Problema 2. Versão interativa aqui.

233 A seguir abordamos um problema da IMO 1991, que foi realizada na cidade de Sigtuna,
 234 Suécia. Este é o P1 da competição e o P6 da SL, proposto pela delegação da antiga União Soviética
 235 (Djukic et al., 2011). Neste exploramos o Teorema da Bissetriz Interna e a desigualdade das
 236 médias aritmética e geométrica.

237 **Problema 3.** Seja o triângulo ABC arbitrário. Provar a desigualdade:

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leq \frac{8}{27},$$

238 onde I é o incentro e l_A, l_B e l_C são os comprimentos das bissetrizes internas dos ângulos do
 239 $\triangle ABC$.

240 A Figura 17 ilustra uma construção geométrica inicial.

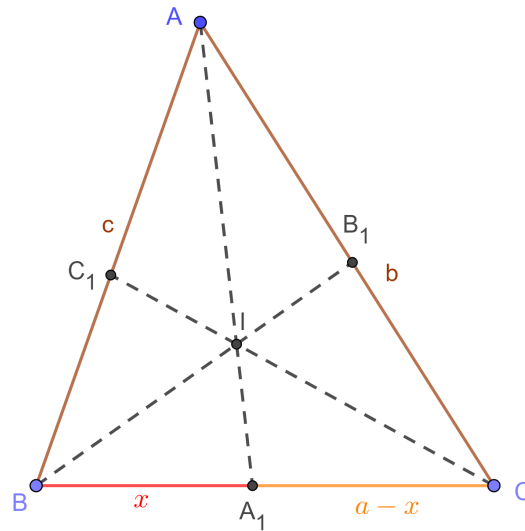


Figura 17. Uma construção geométrica inicial do Problema 3. Versão interativa aqui.

241 Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ as medidas dos lados e A_1 , B_1 e C_1 a intersecção das
 242 bissetrizes internas com os lados BC , CA e AB , respetivamente. Isto é, $l_A = AA_1$, $l_B = BB_1$
 243 e $l_C = CC_1$. Pelo Teorema da Bissetriz Interna relativo a bissetriz AA_1 tem-se:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}.$$

244 Seja $BA_1 = x$. Logo, $A_1C = a - x$. Portanto,

$$\frac{x}{a - x} = \frac{c}{b},$$

245

$$x = BA_1 = \frac{ac}{b + c},$$

246

$$a - x = A_1C = \frac{ab}{b + c}.$$

247

Adicionalmente, pelo Teorema da Bissetriz Interna, relativo a bissetriz BI , segue:

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{c}{x}.$$

248

Substituindo x dos resultados anteriores encontra-se:

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{b + c}{a}.$$

249

Portanto, a fração de interesse pode ser escrita como:

$$\frac{IA}{l_A} = \frac{IA}{IA + IA_1} = \frac{\frac{IA}{IA_1}}{\frac{IA}{IA_1} + 1} =$$

250

$$= \frac{\frac{b+c}{a}}{\frac{b+c}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

251

Analogamente,

$$\frac{IB}{l_B} = \frac{c+a}{a+b+c},$$

252

$$\frac{IC}{l_C} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

253

Segue que:

$$\frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3}.$$

254

Sejam A' , B' e C' as projeções ortogonais de I sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente (Figura 18). Então,

255

$$C'B = BA' = m > 0,$$

256

$$A'C = CB' = n > 0,$$

257

$$B'A = AC' = p > 0,$$

258

$$a = m + n,$$

259

$$b = n + p,$$

260

$$c = p + m.$$

261

Em função de m , n e p a fração de interesse transforma-se em:

$$\frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} = \frac{(n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p)}{8(m+n+p)^3}.$$

262

A desigualdade no enunciado do problema pode ser reescrita como:

$$2 < \frac{(n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p)}{(m+n+p)^3} \leq \frac{64}{27}.$$

263

Para demonstrar a validade do lado direito escreve-se:

$$(n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p) \leq \left(\frac{4(m+n+p)}{3} \right)^3,$$

264

$$\sqrt[3]{(n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p)} \leq \frac{4(m+n+p)}{3},$$

265

$$\sqrt[3]{(n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p)} \leq \frac{(n+2p+m) + (p+2m+n) + (m+2n+p)}{3}.$$

266

O resultado anterior é verdadeiro pela aplicação da desigualdade entre as médias geométrica e aritmética aos números positivos $n+2p+m$, $p+2m+n$ e $m+2n+p$. A igualdade acontece quando $m = n = p$. Ou seja, para $a = b = c$. Para demonstrar a validade do lado esquerdo escreve-se:

267

268

269

$$2(m+n+p)^3 < (n+2p+m)(p+2m+n)(m+2n+p).$$

270 Com a mudança de variável $T = m + n + p$ a desigualdade anterior é reescrita como:

$$2T^3 < (T + p)(T + m)(T + n),$$

271

$$2T^3 < T^3 + (m + n + p)T^2 + (mn + np + pm)T + pmn,$$

272

$$2T^3 < 2T^3 + (mn + np + pm)T + pmn,$$

273

$$0 < (mn + np + pm)T + pmn.$$

274

A última linha é verdadeira pois todas as variáveis envolvidas são números positivos.

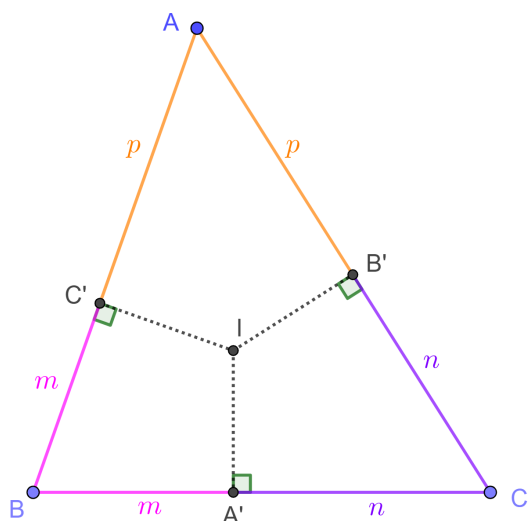


Figura 18. Uma construção geométrica do Problema 3. Versão interativa aqui.

275 O quarto problema é da IMO 2005, realizada na cidade de Mérida, no México. Este é o P19
 276 da SL, proposto pela delegação da Rússia (Djukic et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de
 277 incentro, divisão harmônica, trapézio isósceles e semelhança de triângulos.

278 **Problema 4.** A mediana AM dum triângulo ABC intercepta seu incírculo w nos pontos K e L .
 279 As retas que passam por K e L paralelas a BC cruzam w novamente em X e Y , respetivamente.
 280 As linhas AX e AY interceptam BC em P e Q . Provar que $BP = CQ$.

281 A Figura 19 ilustra uma construção geométrica inicial.

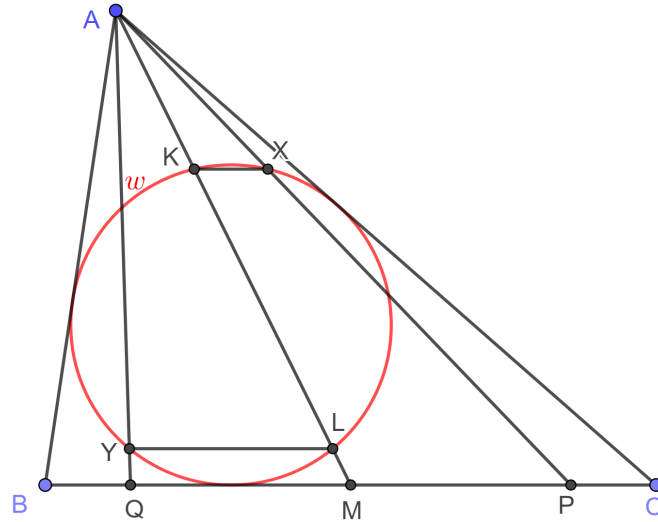


Figura 19. Uma construção geométrica inicial do Problema 4. Versão interativa aqui.

282 Denotam-se por D , E e F os pontos de tangência de w com BC , CA e AB , respectiva-
 283 mente. Sejam os pontos I o incentro, $Y' = AX \cap LY$ e $R = AM \cap EF$ (Figura 20). Como a
 284 reta EF é a polar do ponto A em relação w , então A , R , K e L são conjugados harmônicos
 285 (Proposição 11). Ou seja,

$$\frac{KR}{RL} = \frac{KA}{AL}.$$

286 Como $BC \parallel KX \parallel LY'$ e o critério de semelhança AA, então vale:

$$\triangle AKX \sim \triangle ALY',$$

287

$$\frac{KA}{AL} = \frac{KX}{LY'}.$$

288 Portanto,

$$\frac{KR}{RL} = \frac{KX}{LY'}.$$

289 De $KX \parallel YL$ segue que o quadrilátero inscrito $KXLY$ é um trapézio isósceles. Ou seja,
 290 $KY = XL$ e $XY = KL$. Quer-se provar que $BQ = PC$. Como M é ponto médio isto implica
 291 que $QM = MP$. Se $LY = LY'$, então da semelhança

$$\triangle KXR \sim \triangle LYR$$

292 encontra-se $R \in XY$. Como DI é o eixo de simetria de $KXLY$, bastará provar que $R \in DI$.

293 Por hipótese, R é um ponto da mediana AM . Logo, vale a igualdade de áreas:

$$[\triangle ARB] = [\triangle ARC],$$

294

$$AB \cdot FR \cdot \sin(\angle RFA) = AC \cdot ER \cdot \sin(\angle AER).$$

295 Como os $\triangle IFE$ e $\triangle AFE$ são isósceles, de base FE , então

$$\angle IFE = \angle FEI,$$

296

$$\angle RFA = \angle AER,$$

297

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ER}{FR}.$$

298

Seja o ponto I' a interseção da reta por F paralela a IE com a reta IR . Pela semelhança

$$\triangle FI'R \sim \triangle EIR$$

299 escreve-se:

$$\frac{ER}{FR} = \frac{EI}{FI'} = \frac{FI}{FI'}$$

300

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FI}{FI'}$$

301

Estudando os ângulos nos $\triangle AFE$ e IFE encontra-se que:

$$\angle EFI' = \angle IFE = \angle FEI,$$

302

$$\angle IFI' = \angle BAC.$$

303

Pelo critério de semelhança LAL vale:

$$\triangle IFI' \sim \triangle BAC.$$

304

Portanto,

$$\angle I'IF = \angle CBA.$$

305

Por outro lado, o quadrilátero $BDIF$ é inscritível pois a soma dos ângulos opostos é 180° .

306

Segue que:

$$\angle FID = 180^\circ - \angle CBA.$$

307

Como $\angle FID + \angle I'IF = 180^\circ$, os pontos D , I e R são colineares.

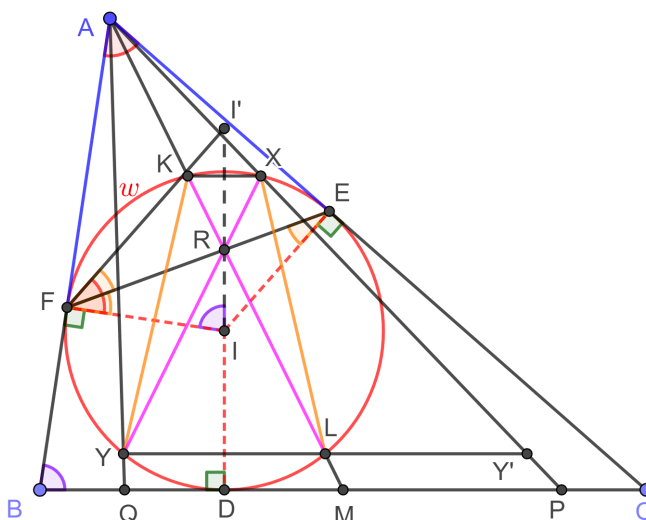


Figura 20. Resolução do Problema 4. Versão interativa aqui.

308 O último problema é da IMO 2009, realizada na cidade de Brémen, Alemanha. Este é o
 309 P4 da competição e o P16 da SL, proposto pela delegação da Bélgica (Djukic et al., 2011). Neste
 310 exploramos os conceitos de quadriláteros inscritíveis e reta polar.

311 **Problema 5.** Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. As bissetrizes dos ângulos $\angle CAB$
 312 e $\angle ABC$ encontram os lados BC e CA em D e E , respectivamente. Seja K o incentro do
 313 triângulo ADC . Suponha-se que $\angle BEK = 45^\circ$. Encontrar todos os valores possíveis do $\angle BAC$.
 314

315 A Figura 21 ilustra uma construção geométrica inicial.

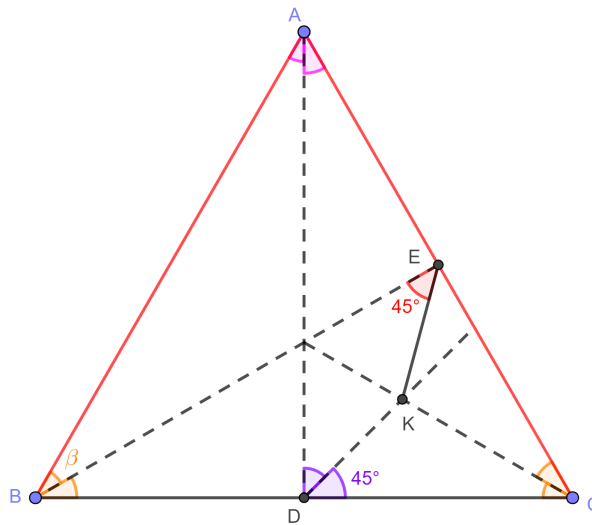


Figura 21. Uma construção geométrica inicial do Problema 5. Versão interativa aqui.

316 De $AB = AC$ o $\triangle ABC$ é isósceles, de base BC , e AD é bissetriz, altura e mediana.
 317 Denotam-se por I e L os incentros dos $\triangle ABC$ e $\triangle BDA$, respectivamente. Como AL e BL
 318 são bissetrizes e considerando o triângulo retângulo ADB , vale que:

$$\angle BAL = \angle LAD = \alpha,$$

319

$$\angle ABL = \angle LBD = \beta,$$

320

$$2(\alpha + \beta) = 90^\circ,$$

321

$$\alpha + \beta = 45^\circ.$$

322 O $\angle ALI$ é externo em L do $\triangle ALB$. Segue:

$$\angle ALI = \angle BAL + \angle ABL,$$

323

$$\angle ALI = \alpha + \beta = 45^\circ.$$

324 Considerando a hipótese $\angle BEK = 45^\circ$ e a recíproca de ângulos alternos entre paralelas
 325 encontra-se $AL \parallel EK$. Seja o ponto $L' = BI \cap DK$. Como

$$\angle L'LA = \angle L'DA = 45^\circ,$$

então o quadrilátero $ALDL'$ é inscrito pela circunferência m . Portanto,

$$\angle LAL' = 180^\circ - \angle L'DL = 90^\circ,$$

$$\angle AL'L = \angle ADL = 45^\circ,$$

$$\angle LL'D = \angle LAD = \alpha.$$

Adicionalmente, LL' é diâmetro de m e $AL = AL'$. Sendo o segmento AK bissetriz do $\angle DAC$ tem-se:

$$\angle DAK = \angle KAC = \alpha,$$

$$AK = AL = AL'.$$

O $\angle AKI$ é externo em K do $\triangle AKC$. Segue:

$$\angle AKI = \angle KAC + \angle ACK,$$

$$\angle ALI = \alpha + \beta = 45^\circ.$$

Como $AL \parallel EK$ e $\angle LAL' = 90^\circ$ o prolongamento do segmento KE é perpendicular com AL' . Sejam os pontos $P = AK \cap L'E$ e $Q = AC \cap L'K$. De

$$\angle PAQ = \angle PL'Q = \alpha$$

encontra-se que o quadrilátero $APQL'$ é inscrito pela circunferência n . Podem acontecer dois casos: a) $PQ \parallel AL'$ (Figura 22) e b) $PQ \nparallel AL'$ (Figura 23). No caso a) $PQ \parallel AL'$ segue que o quadrilátero $APQL'$ é um trapézio isósceles e

$$AK = KL'.$$

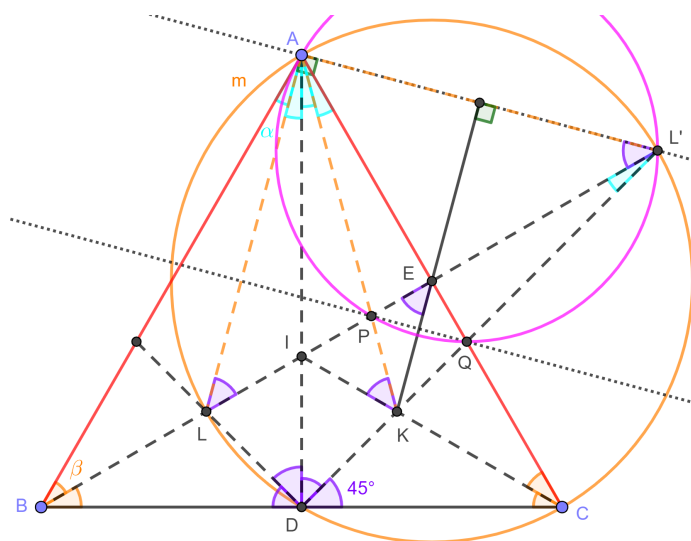


Figura 22. Uma construção geométrica do caso a) do Problema 5. Versão interativa aqui.

339 Ou seja, o $\triangle AKL'$ é equilátero. Com isto,

$$\angle AL'K = 60^\circ = 45^\circ + \alpha,$$

340 $\alpha = 15^\circ,$

341 $\angle BAC = 4\alpha = 60^\circ.$

342 No caso b) $PQ \nparallel AL'$ seja o ponto $M = PQ \cap AL'$ (Figura 23). Pelo Teorema 10 (Brocard)
 343 KE é a reta polar do ponto M relativo a circunferência n . Como $KE \perp AL'$, então AL' é
 344 diâmetro de n . Segue que:

$$\angle L'PA = \angle L'QA = 90^\circ.$$

345 Em outras palavras, neste caso o ponto E é ortocentro do $\triangle AKL'$. Pela soma dos ângulos
 346 internos no $\triangle APB$, retângulo em P , pode ser escrito:

347 $3\alpha + \beta = 90^\circ,$

348 $2\alpha + 45^\circ = 90^\circ,$

349 $2\alpha = 45^\circ,$

$$\angle BAC = 4\alpha = 90^\circ.$$

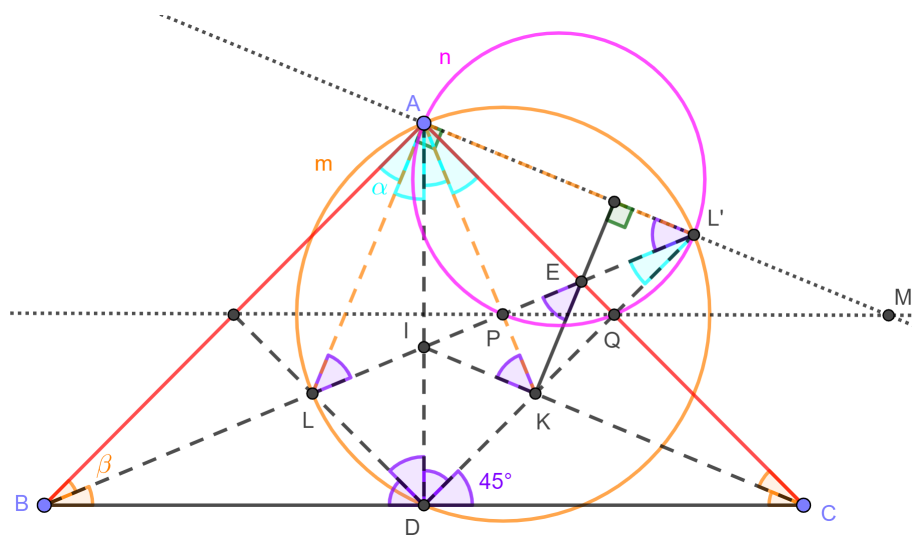


Figura 23. Uma construção geométrica do caso b) do Problema 5. Versão interativa aqui.

350 O anterior termina a resolução do problema. Isto é, $\angle BAC = 60^\circ$ ou $\angle BAC = 90^\circ$.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

351 Foi feita uma rápida introdução de alguns conceitos básicos relativos aos teoremas da
 352 bissetriz, assim como da divisão harmônica. A seguir foram discutidos detalhadamente cinco
 353 problemas IMO. Espera-se que estes sirvam de apoio aos professores do Ensino Médio que se
 354 aventuram em tópicos mais avançados e treinam estudantes para participar em olimpíadas.

5. REFERÊNCIAS

- 355 BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. [S.l.]: SBM, Sociedade Brasileira de
356 Matemática., 2007. ISBN 9788583371069.
- 357 CRUZ, M. P. M. da; FILHO, I. de O. H. Variação de soluções na geometria com a utilização do
358 geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Pontifícia Universidade
359 Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 78–101, 2019.
- 360 DJUKIC, D.; JANKOVIC, V.; MATIC, I.; PETROVIC, N. **The IMO Compendium**. Springer-Verlag GmbH,
361 2011. ISBN 1441998535. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_](https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html)
362 [djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.](https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html)
363 [html](https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html)>.
- 364 DOLCE, O. **Fundamentos de Matemática Elementar Geometria Plana - Vol.9**: Geometria plana -
365 vol.9. [S.l.]: ATUAL (DIDÁTICO) - GRUPO SARAIVA, 2013. ISBN 9788535716863.
- 366 FERREIRA, R. Ensinando matemática com o geogebra. **Enciclopédia Biosfera**, v. 6, n. 10, 2010.
- 367 FRENSEL, J. D. K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. [S.l.]: SBM, 2017. ISBN 9788583371212.
- 368 HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**. 2011.
- 369 LINARES, J. L. Cálculo de áreas: cinco problemas resolvidos das listas de olimpíadas internacionais
370 de matemática. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, Zenodo, v. 1, n. 1, p. 1–18, maio 2024.
371 ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.10806293>>.
- 372 LINARES, J. L.; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de
373 olimpíadas internacionais de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 2, n. 1, p.
374 14–36, jun. 2023. ISSN 2237-8103. Disponível em: <[https://periodicos.ufop.br/rmat/article/](https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334)
375 [view/6799/5334](https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334)>.
- 376 LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de
377 ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional
378 de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 15–37, 2022. ISSN
379 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>>.
- 380 MENEGALLI, R. S.; BRANDL, E. Geometria no ensino médio. **Anais da Feira do Conhecimento do**
381 **IFC Campus Ibirama**, v. 3, n. 1, 2022.
- 382 MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. [S.l.]: Ed. Rio de Janeiro: Sociedade
383 Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2015.
- 384 NETO, A. C. M. **Geometria**. [S.l.]: SBM, 2013. ISBN 9788585818937.
- 385 PEREIRA, A. C. T.; SILVA, M. J. F. D. Um levantamento das pesquisas que tratam a bissetriz como
386 lugar geométrico. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 9, n. 1, 2020.
- 387 PEREIRA, T. d. L. M. O uso do software geogebra em uma escola pública: interações entre alunos
388 e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. **Juiz de**
389 **Fora: UFJF**, 2012.

³⁹⁰ PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento.** 2006.

³⁹¹ SILVA, F. B. d. Conceitos de geometria plana com software geogebra: um estudo de caso no
³⁹² ensino médio. 2018.

³⁹³ THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento.** 2006.