

De Catenoides a Nodoides: A Classificação das Superfícies de Delaunay

From Catenoids to Nodoids: The Classification of Delaunay Surfaces

De Catenoides a Nodoides: La Clasificación de las Superfícies de Delaunay

Gil Fidelix de Souza

<gilsouza@ufop.edu.br>

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil



<<https://orcid.org/0000-0003-3111-4943>>

Resumo

O objetivo deste estudo é apresentar e analisar as superfícies de Delaunay, que são superfícies de revolução com curvatura média constante. Utilizando métodos de geometria diferencial, investigamos as propriedades das curvas geradoras que definem essas superfícies e exploramos suas características geométricas e analíticas. Classificamos as superfícies de Delaunay como cilindros, esferas, catenoides, nodoides e onduloídes. Estas superfícies são reconhecidas como soluções elegantes e práticas para problemas de estabilidade e fenômenos na biologia celular. Concluímos que o estudo das superfícies de Delaunay enriquece a compreensão teórica da geometria diferencial e oferece aplicações práticas valiosas em diversas disciplinas científicas.

Palavras-chave: Superfícies de Revolução. Curva Geradora. Curvatura Média Constante. Superfícies de Delaunay. Geometria Diferencial.

Abstract

The aim of this study is to present and analyze Delaunay surfaces, which are revolution surfaces with constant mean curvature. Using differential geometry methods, we investigate the properties of the generating curves that define these surfaces and explore their geometric and analytical characteristics. We classify Delaunay surfaces as cylinders, spheres, catenoids, nodoids and onduloídes. These surfaces are recognized as elegant and practical solutions for stability problems and phenomena in cellular biology. We conclude that studying Delaunay surfaces not only enriches the theoretical understanding of differential geometry but also offers valuable practical applications in various scientific disciplines.

Keywords: Surfaces of Revolution. Generating Curve. Constant Mean Curvature. Delaunay Surfaces. Differential Geometry.

Resumen

El objetivo de este estudio es presentar y analizar las superfícies de Delaunay, que son superfícies de revolución con curvatura media constante. Utilizando métodos de geometría diferencial, investigamos las propiedades de las curvas generadoras que definen estas superfícies y exploramos sus características geométricas y analíticas. Clasificamos las superfícies de Delaunay en cilindros, esferas, catenoides, nodoides y onduloídes. Estas superfícies son reconocidas como soluciones elegantes y prácticas a problemas y fenómenos de estabilidad en la biología celular. Concluimos que el estudio de las superfícies de Delaunay enriquece la comprensión teórica de la geometría diferencial y ofrece valiosas aplicaciones prácticas en varias disciplinas científicas.

Palabras-Clave: Superfícies de Revolución. Curva Generadora. Curvatura Media Constante. Superfícies de Delaunay. Geometría Diferencial.

1. INTRODUÇÃO

As superfícies de curvatura média constante (CMC) surgem como soluções naturais em problemas físicos, especialmente na presença de tensão superficial em líquidos. A origem desse conceito remonta aos estudos de Thomas Young (Young, 1832) e Pierre Simon de Laplace (Laplace, 1806), que exploraram como a tensão superficial molda a forma de interfaces líquidas, como películas de sabão (Plateau, 1873; Isenberg, 1992; Oprea, 2000). Em equilíbrio, essas superfícies adotam uma curvatura média constante, o que significa que se curvam de maneira uniforme em todos os pontos.

Superfícies CMC incluem as superfícies mínimas, que possuem curvatura média nula e são conhecidas por minimizar a área, como demonstrado pelas formas das películas de sabão. Encontrar exemplos explícitos dessas superfícies é um desafio matemático, frequentemente exigindo restrições geométricas ou topológicas. Trabalhos como (Medeiros; Ripoll, 1991) e (Souza, 2005) abordam a invariância dessas superfícies por subgrupos a 1-parâmetro de isometrias, classificando-as em três tipos: translações, rotações e movimentos helicoidais. Essa invariância simplifica o estudo dessas superfícies, concentrando-se nas suas curvas geradoras.

A equação da curvatura média revela que as superfícies CMC invariantes por translações incluem tanto planos paralelos à direção da translação quanto cilindros circulares com eixo alinhado nessa mesma direção. O estudo de superfícies invariantes por movimentos helicoidais foi amplamente explorado em trabalhos como (Carmo; Dajczer, 1982), bem como em espaços de formas tridimensionais em (Barrientos, 1995) e (Teixeira, 2024). As superfícies de revolução CMC, chamadas superfícies de Delaunay, são classificadas pelas suas curvas geradoras, que ao girar em torno de um eixo, formam a superfície.

Os estudos de Delaunay em (Delaunay, 1841) utilizam o cálculo das variações e propriedades das cônicas para demonstrar que as curvas geradoras das superfícies de Delaunay são *roulettes* formadas por um dos focos de uma cônica. Uma abordagem alternativa é apresentada em (Kenmotsu, 1980) e (Teixeira; Souza, 2021), onde as superfícies de Delaunay são classificadas como uma família parametrizada pelo valor B no eixo real não-negativo: $B = 0$ corresponde ao cilindro circular reto, $0 < B < 1$ às onduloídes, $B = 1$ à esfera, e $B > 1$ às noduloídes.

Além da teoria matemática, essas superfícies têm aplicações em áreas diversas, como estabilidade (Pulov; Mladenov, 2019), comportamento de líquidos em microgravidade (Perera; Paragoda; Dharmasena, 2022), modelagem de interfaces em materiais e biologia, onde ajudam a descrever a morfologia de certas membranas celulares (Bar-Ziv; Moses, 1994; Deuling; Helfrich, 1977; Thompson, 1917; Yoneda, 1964). A combinação de complexidade matemática e relevância prática torna o estudo dessas superfícies um campo de pesquisa interdisciplinar e ativo.

2. CURVAS, SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO E CURVAS GERADORAS.

Nesta seção, apresentaremos uma breve introdução às definições e conceitos fundamentais relacionados à geometria de curvas e superfícies de revolução.

Uma *curva plana parametrizada* de classe C^k é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ expressa como $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, em que as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são de classe C^k . O parâmetro da curva é $t \in I$. O conjunto $\alpha(I) = \{p \in \mathbb{R}^2 : p = \alpha(t), t \in I\}$ é chamado de

traço de α .

Exemplo 1. Sejam $a > b$ e c constantes positivas, as curvas de equações cartesianas $y = x^2/4c$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ representam uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente. Tais curvas podem ser parametrizadas, respectivamente, por: $\alpha(t) = (t, t^2/4c)$, $t \in \mathbb{R}$, $\beta(u) = (a \cos u, b \sin u)$, $u \in [0, 2\pi]$ e $\gamma(r) = (\pm a \cosh r, b \sinh r)$, $r \in \mathbb{R}$.

As curvas do Exemplo 1 são conhecidas na literatura como cônicas, representando o caso não-degenerado dessas curvas em posição ideal no plano cartesiano. Dois casos degenerados de interesse estão relacionados à elipse, sendo que o primeiro deles ocorre ao fazermos b tender a zero nas equações paramétricas da elipse, degenerando-a em um segmento. O segundo caso degenerado que consideramos é dado por $a = b$, caso em que a elipse deforma-se em um círculo de raio a .

Definição 2. Sabe-se de (Tenenblat, 2008) que curvatura $k(t)$ de uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ de \mathbb{R}^2 é dada por

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad (1)$$

ou

$$k(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s) \quad (2)$$

se α está parametrizada pelo comprimento de arco (p.p.c.a) s .

Em todo o texto a seguir, utilizaremos a letra “ s ” para referirmos ao parâmetro comprimento de arco da curva analisada, a menos de menção contrária.

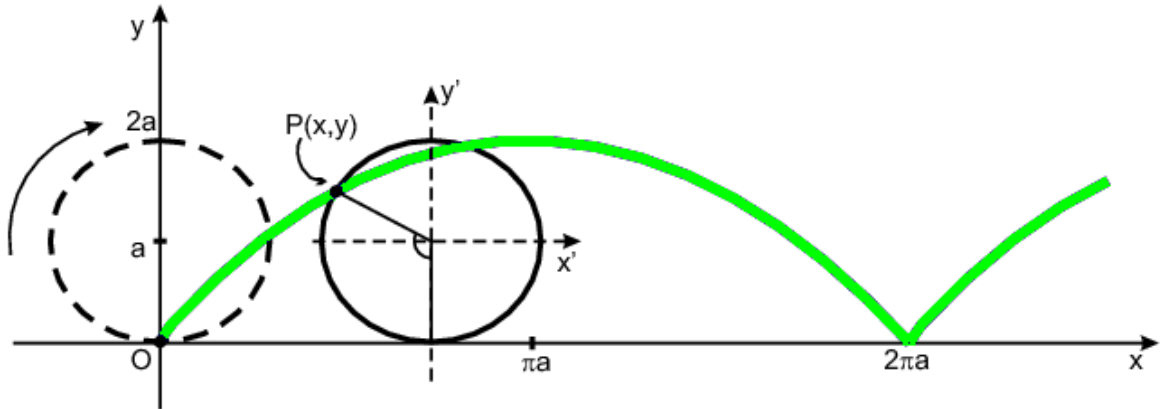
Exemplo 3. A parábola, a elipse e hipérbole apresentadas no Exemplo 1 possuem curvaturas dadas por $\frac{1}{2c(1 + \frac{t^2}{4c^2})^{3/2}}$, $\frac{1}{ab(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}}$ e $\frac{-1}{ab(a^2 \sinh^2 r + b^2 \cosh^2 r)^{3/2}}$, respectivamente. Além disso, essas curvaturas não se anulam, o que é uma informação importante para análises futuras.

Definição 4. Uma roulette é o lugar geométrico traçado por um ponto P , que está rigidamente vinculado a uma curva C_1 enquanto esta rola sem deslizar sobre uma curva fixa C_2 .

Exemplo 5. O exemplo mais conhecido de roulette é a cicloide. A cicloide é a trajetória de um ponto de um círculo de raio a que rola sem deslizar sobre o eixo x . A equação da cicloide é $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, veja a figura 1.

Outros exemplos conhecidos de roulettes incluem as hipocicloides e as epicicloides (veja (Cañestro, 2024b; Cañestro, 2024a)). Para entender melhor o conceito de roulettes, consulte (Weisstein, 2003); para um estudo mais aprofundado, veja (Besant, 1890) e (Lockwood, 1967). Um estudo alternativo sobre roulettes pode ser encontrado em (Carvalho, 2013), onde é utilizada a estrutura complexa do plano para o desenvolvimento da teoria. Neste trabalho, focamos especificamente na situação em que a segunda curva é uma reta, ou seja, analisamos roulettes geradas em relação a uma reta.

Definição 6. Uma curva de Delaunay é uma roulette gerada pelo movimento de um dos focos de uma cônica em relação a uma reta.



Fonte: Souza (2005)

Figura 1. A cicloide, um caso particular de roulette.

Quando necessário especificar a cônica envolvida, nos referiremos à *roulette* da parábola, elipse ou hipérbole. Na próxima seção, discutiremos em detalhes as curvas de Delaunay.

Superfícies de revolução são geradas pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo. Ao desconsiderar movimentos rígidos em \mathbb{R}^3 , podemos nos concentrar nas superfícies de rotação em torno do eixo x . A investigação dessas superfícies se limita à análise da curva geradora (ou de perfil), obtida pela interseção da superfície com um plano que contém o eixo de rotação. No caso em que a curva geradora $(x(s), y(s), 0)$ é p.p.c.a, a parametrização da superfície de revolução resultante é dada por:

$$X(s, v) = (x(s), y(s) \cos v, y(s) \sin v), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R},$$

de acordo com (Carmo, 2010), em seu quarto exemplo da seção 3.3, a equação da curvatura média de uma superfície de revolução é:

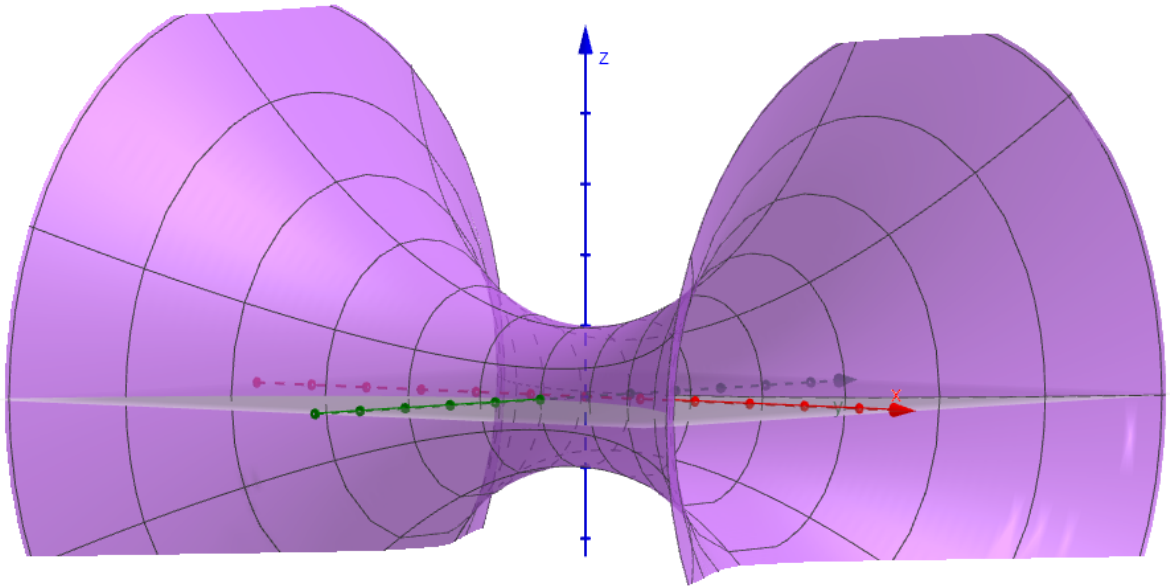
$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right). \quad (3)$$

Para a superfície de revolução acima, teremos: $E = |X_s|^2$, $G = |X_v|^2$, $N = |X_s \times X_v|/\sqrt{EG}$, $e = \langle X_{ss}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$, de modo que:

$$H = \frac{1}{2} \left(x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) + \frac{x'(s)}{y(s)} \right).$$

Derivando $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ e simplificando o resultado, teremos $x''(s)x'(s) + y''(s)y(s) = 0$ ou $y''(s) = -x''(s)x'(s)/y'(s)$, cuja substituição na última equação resulta em:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{x''(s)}{y'(s)} + \frac{x'(s)}{y(s)} \right). \quad (4)$$



Fonte: Souza (2005)

Figura 2. Uma superfície de rotação de eixo x .

Exemplo 7. Entre os exemplos clássicos de superfícies de revolução CMC estão o cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$. O cilindro pode ser parametrizado por:

$$X(s, v) = (s, a \cos v, a \sin v)$$

e a esfera por:

$$Y(s, v) = \left(-2a \cos \left(\frac{s}{2a} \right), 2a \sin \left(\frac{s}{2a} \right) \cos v, 2a \sin \left(\frac{s}{2a} \right) \sin v \right).$$

Observamos que as curvas geradoras de ambas as superfícies são p.p.c.a, o que nos permite utilizar a equação (4) para calcular H . Verificamos que a curvatura média dessas superfícies é

$$H = \frac{1}{2a}.$$

3. O RESULTADO DE DELAUNAY

Nesta seção, apresentaremos o resultado obtido por C. Delaunay em 1841 (Delaunay, 1841):

Teorema 8 (Delaunay). *Uma superfície de revolução de curvatura média constante é obtida pela rotação de uma curva de Delaunay.*

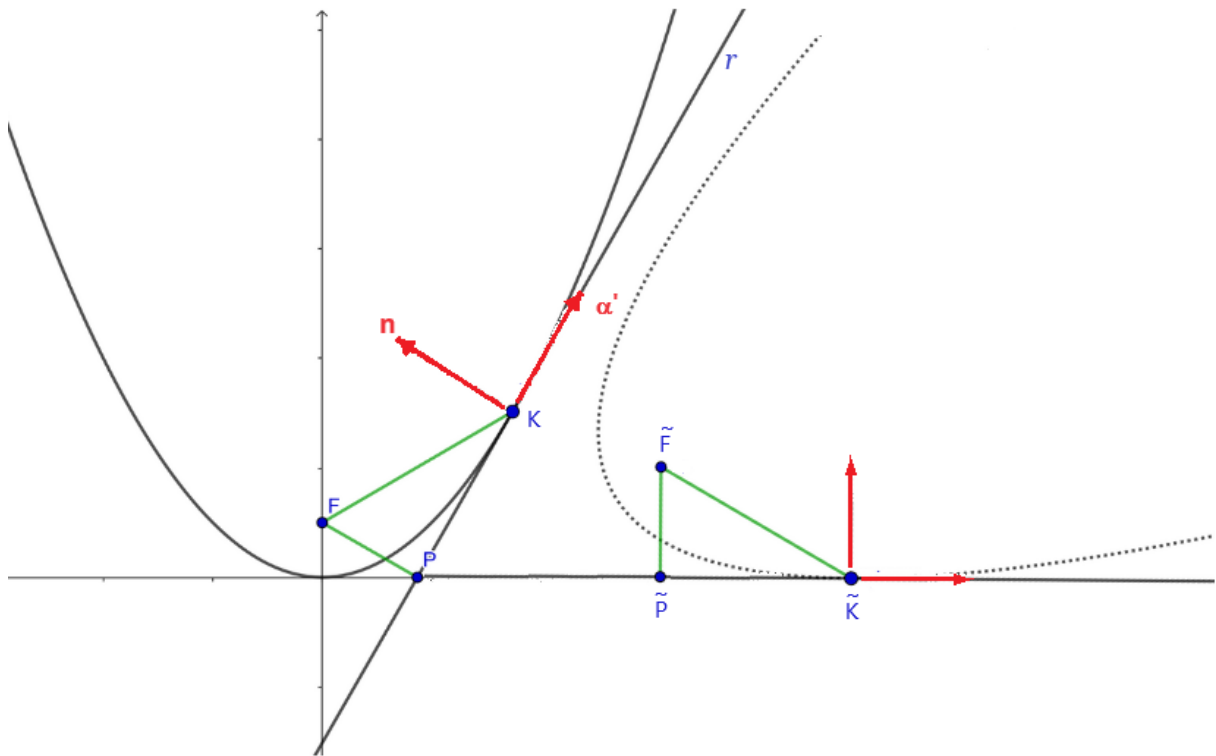
A demonstração do Teorema 8 apresentada baseia-se nos trabalhos de (Eells, 1987) e (Souza, 2005) e segue estas etapas: descrição das curvas de Delaunay; cálculo das curvaturas médias das superfícies de revolução geradas pela rotação dessas curvas; e, reciprocamente, o uso da expressão da curvatura média (3) para concluir que a curva geradora de uma superfície de revolução CMC é uma curva de Delaunay.

3.1. Propriedades gerais das curvas de Delaunay.

O resultado a seguir apresenta uma propriedade importante envolvendo as normais às curvas de Delaunay.

Proposição 9. *Seja C uma cônica não-degenerada e F um foco de C . Seja β a curva de Delaunay originada pela trajetória de F associada a C em relação a uma reta. Sejam \tilde{F} um ponto de β e \tilde{K} o ponto de contato de C com o eixo x nesse momento. Então β é uma curva regular; além disso, a reta normal à roulette em \tilde{F} passa por \tilde{K} , ou seja, o segmento $\tilde{F}\tilde{K}$ é perpendicular à reta tangente à curva de Delaunay em \tilde{F} .*

Demonstração. Consideramos a curva de Delaunay de $F = (x_0, y_0)$ associada à curva C , sendo C p.p.c.a dada por $\alpha(\bar{s})$ e $\{\alpha', \mathbf{n}\}$ o referencial de Frenet em $\alpha(\bar{s})$. A figura 3 representa dois



Fonte: (Souza, 2005)

Figura 3. Representação de dois momentos do movimento de uma cônica não-degenerada que rola sem deslizar sobre uma reta.

instantes distintos:

- No primeiro momento, antes de C começar a rolar, estão indicados o ponto $F = (x_0, y_0)$, a reta r , tangente a C em $K = \alpha(\bar{s})$, o ponto $P \in r$ tal que $FP \perp r$ e os vetores tangente e normal à C ($\alpha'(\bar{s}) = \alpha'$ e $\mathbf{n}(\bar{s}) = \mathbf{n}$);

- O segundo momento indica o instante em que C girou sobre o eixo x , sem escorregar, até o instante em que ponto K (representado por \tilde{K}) seja o ponto de tangência com o eixo x .

Suponhamos C orientada de tal modo que o vetor normal unitário $\mathbf{n}(\bar{s})$ em $K = \alpha(\bar{s})$ aponte para “dentro”(fig. 3). Escrevendo \overrightarrow{FK} em termos do referencial de Frenet, temos:

$$\overrightarrow{FK} = \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle \alpha' + \langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = (|PK|)\alpha' - (|PF|)\mathbf{n},$$

em que $|PK|$ e $|PF|$ representam os comprimentos dos segmentos PK e PF , respectivamente.

No segundo momento, C girou até que K ficasse tangente ao eixo x , sendo então representado por \tilde{K} . Nesse momento, os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ atuam, respectivamente, como vetores tangente e normal à curva C em \tilde{K} . Assim, ao expressar $\overrightarrow{\tilde{F}\tilde{K}}$ nessa base, obtemos:

$$\overrightarrow{\tilde{F}\tilde{K}} = \left(\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, \langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n}' \rangle \right) = (|PK|, -|PF|).$$

Da análise da figura 3, obtemos que as componentes de $\tilde{F} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ são dadas por

$$\begin{cases} \tilde{x} = |V\tilde{K}| - |\tilde{P}\tilde{K}| = |V\tilde{K}| - |PK| \\ \tilde{y} = |\tilde{P}\tilde{F}| = |PF| \end{cases} \quad (5)$$

sendo $|V\tilde{K}|$ é igual ao comprimento de arco de C entre $V = \alpha(0)$ e $K = \alpha(\bar{s})$. Logo $|V\tilde{K}| = \bar{s}$, pois \bar{s} é o parâmetro comprimento de arco de C . Como $|PK| = \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle$ e $|PF| = -\langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n} \rangle$, uma parametrização da curva de Delaunay é:

$$\beta(\bar{s}) = (\bar{s} - \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, -\langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n} \rangle). \quad (6)$$

Como $\overrightarrow{FK} = \alpha(\bar{s}) - F$, temos que $(\overrightarrow{FK})' = \alpha'$. Então, o vetor tangente de $\beta(\bar{s})$ é:

$$\begin{aligned} \beta'(\bar{s}) &= \left(1 - \left(\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle \right)', \left(\langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n} \rangle \right)' \right) \\ &= \left(1 - \left\langle \left(\overrightarrow{FK} \right)', \alpha' \right\rangle - \langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle, \left\langle \left(\overrightarrow{FK} \right)', \mathbf{n}' \right\rangle + \langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n}' \rangle \right) \\ &= \left(1 - \langle \alpha', \alpha' \rangle - \langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle, \langle \alpha', \mathbf{n} \rangle + \langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n}' \rangle \right) \\ &= \left(-\langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle, \langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n}' \rangle \right) = \left(-\langle \overrightarrow{FK}, \mathbf{n} \rangle, -\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle \right) \\ &= k(-|PF|, -|PK|), \end{aligned}$$

pois pelas fórmulas de Frenet, $\alpha'' = k\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}' = -k\alpha'$, sendo k a curvatura de C em $\alpha(\bar{s})$. Portanto

$$\left\langle \overrightarrow{\tilde{F}\tilde{K}}, \beta'(\bar{s}) \right\rangle = k(-|PK| \cdot |PF| + (-|PF|)(-|PK|)) = 0,$$

mostrando que o segmento $\tilde{F}\tilde{K}$ é perpendicular à reta tangente à curva de Delaunay em $\tilde{F} = \beta(\bar{s})$. A regularidade da curva de Delaunay segue da equação $\beta'(\bar{s}) = k(-|PF|, -|PK|)$, pois $k \neq 0$ para cada uma das cônicas não-degeneradas de acordo com o Exemplo 3. \square

Corolário 10. *Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ a reparametrização p.p.c.a de $\beta(\bar{s})$. Então, com a mesma notação da Proposição 9,*

$$|FK| = \pm |PF| (x'(s))^{-1} = \pm y(s) (x'(s))^{-1}. \quad (7)$$

Demonstração. Como visto na proposição anterior, $\beta'(\bar{s}) = (\tilde{x}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s})) = -k(|PF|, |PK|)$, logo

$$\|\beta'(\bar{s})\| = |k|\sqrt{(|PF|)^2 + (|PK|)^2} = |k| \cdot |FK|,$$

sendo $\|\beta'(\bar{s})\|$ o comprimento do vetor $\beta'(\bar{s})$. Desde que $k \neq 0$, obtemos a expressão a seguir para o vetor tangente unitário

$$\mathbf{t}(\bar{s}) = \frac{\beta'(\bar{s})}{\|\beta'(\bar{s})\|} = \pm \left(\frac{|PF|}{|FK|}, \frac{|PK|}{|FK|} \right).$$

Como $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ é a reparametrização p.p.c.a da curva de Delaunay, então $\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}(\bar{s}(s))$ e, portanto

$$x'(s) = \pm \frac{|PF|}{|FK|} = \pm \frac{y(s)}{|FK|}.$$

\square

3.2. As curvas de Delaunay.

Uma *parábola com foco F e reta diretriz d* é o conjunto de pontos K no plano \mathbb{R}^2 que satisfaz a relação $FK = \text{dist}(K, d)$, em que $\text{dist}(K, d)$ denota a distância do ponto K à reta d . O *vértice* da parábola é o ponto da diretriz e está localizado na reta perpendicular à diretriz d que passa pelo foco F . Esta reta é a que minimiza a distância entre o foco e a diretriz, sendo, portanto, a que estabelece a menor distância entre a parábola e a diretriz.

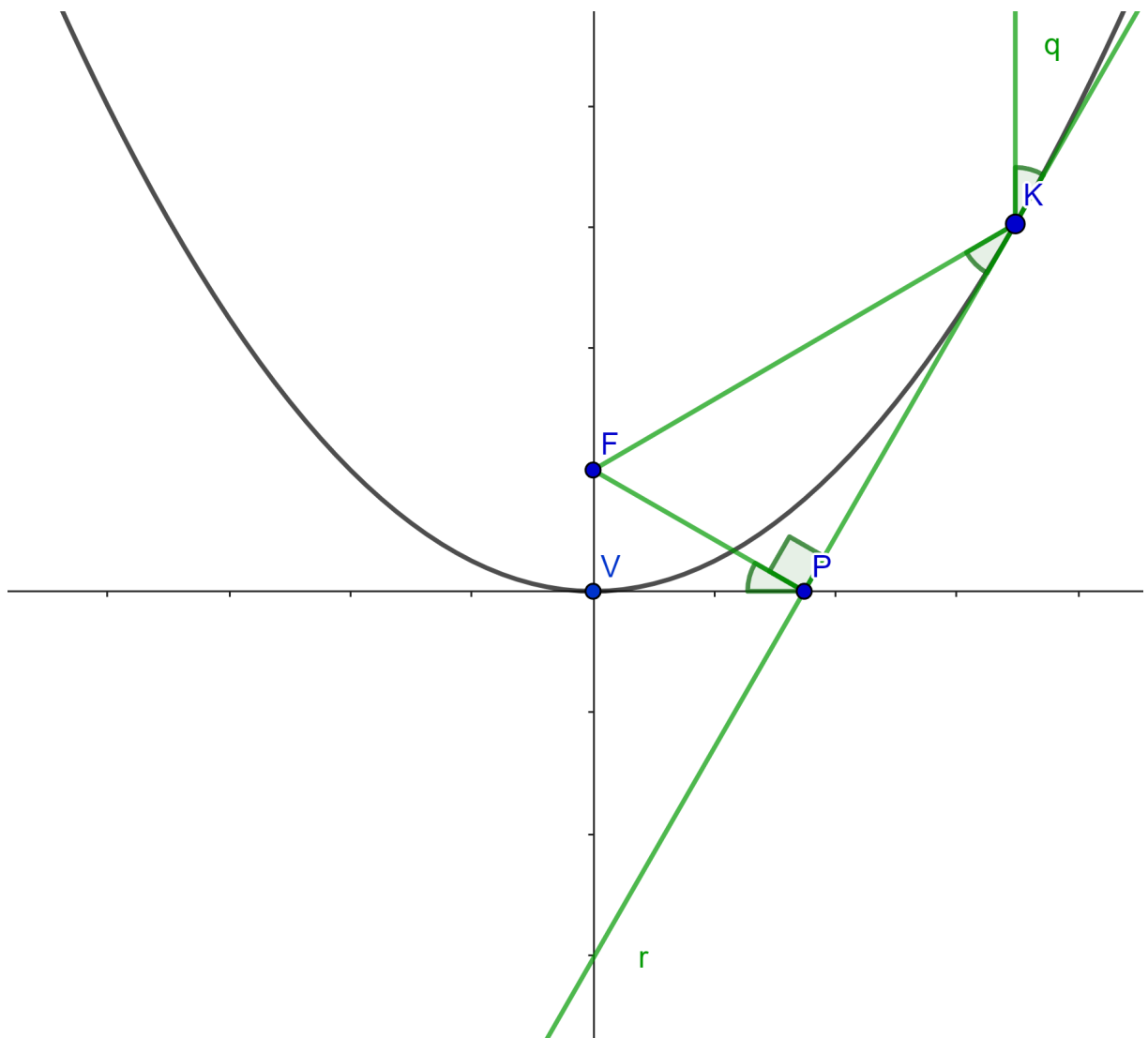
Proposição 11. *Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ a parametrização da roulette da parábola pelo comprimento de arco. Então a função coordenada $x(s)$ satisfaz*

$$x'(s) = \pm \frac{c}{y(s)}. \quad (8)$$

Além disso, $\gamma(s)$ é uma catenária.

Demonstração. Vamos examinar a parábola com vértice V na origem e foco em $F = (c, 0)$. Seja r a tangente em K e q a semirreta paralela ao eixo y com início em K . Em relação à parábola, à reta tangente e à semirreta q , temos as seguintes propriedades:

- O ângulo entre o raio focal FK e a tangente r é idêntico ao ângulo entre r e q (figura 4).
- FP é ortogonal a r (figura 4).



Fonte: Acervo do autor.

Figura 4. Ângulos retos na parábola.

A primeira propriedade é conhecida como *lei da reflexão*, para uma demonstração de tais propriedades veja (Zwicker, 1963), página 129. Graças às propriedades, vemos na figura 4 que os triângulos FPK e FVP são semelhantes, portanto:

$$\frac{|FP|}{|FK|} = \frac{|FV|}{|FP|} = \frac{c}{|FP|}.$$

Considerando que a parábola rolou sem deslizar sobre o eixo x até que o ponto K fosse tangente a este eixo, teremos $|PF| = y(s)$. Este fato, aliado à equação (7), resulta na última equação que a coordenada x da roulette satisfaz:

$$x'(s) = \pm \frac{c}{y(s)}.$$

Considerando que, localmente, a curva é o gráfico de uma função $y = y(x)$, a equação (8) transforma-se em:

$$\pm y(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} = c \text{ ou } y' = \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{c^2}}.$$

A última equação pode ser resolvida por separação de variáveis e pela substituição hiperbólica $\cosh u = y/c$, resultando em $y(x) = c \cosh x/c$. Assim, concluímos que a roulette da parábola é uma catenária. \square

Agora, trataremos do caso da roulette de uma elipse, que é denominada *ondulária*. A elipse com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é o conjunto dos pontos $K \in \mathbb{R}^2$ tais que a soma das distâncias aos focos (raios focais) é constante, ou seja, $|F_1K| + |F_2K| = 2a > 0$, em que $a > c$ é o comprimento do semi-eixo maior e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ é o comprimento do semi-eixo menor.

Analogamente ao caso da parábola, utilizaremos propriedades da tangente r para deduzir uma equação análoga à (8) para a ondulária.

Proposição 12. *Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ a parametrização da ondulária pelo comprimento de arco. Então a função coordenada $x(s)$ satisfaz*

$$x'(s) = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)}, \quad (9)$$

sendo “ a ” o semi-eixo maior e “ b ” o semi-eixo menor da elipse.

Demonstração. Vamos examinar a elipse com centro em O e semi-eixos maior e menor representados por a e b . Além disso, consideremos o círculo centrado em O e raio a . Em relação à elipse e ao círculo, temos as seguintes observações:

- O ângulo entre os raios focais e a tangente r são idênticos (figura 5).
- Os pontos P_1 e P_2 , que são as interseções de r com o círculo de centro O e raio a , possuem as propriedades $P_1F_1 \perp r$ e $P_2F_2 \perp r$ (figura 5).
- Vale a relação $|P_1F_1| \cdot |P_2F_2| = b^2$.

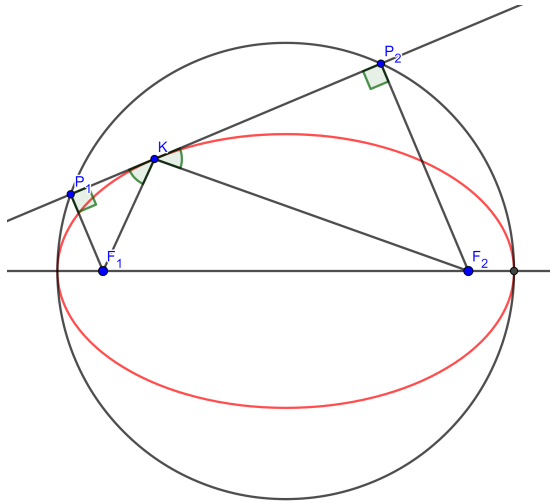
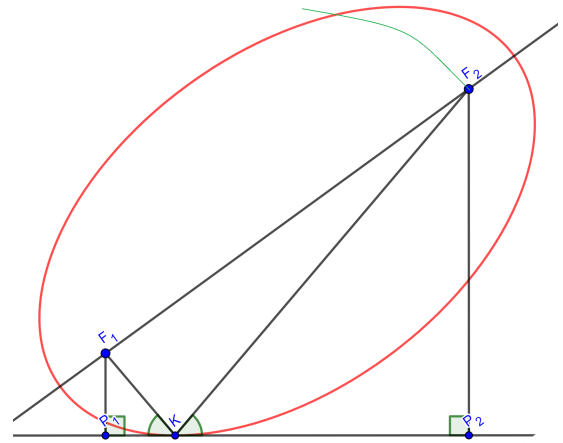


Figura 5. Segmentos ortogonais na elipse.


 Figura 6. Elipse em movimento. O traço em verde representa a trajetória de F_2 .

Fonte: (Souza, 2005)

A primeira propriedade é mais conhecida que as últimas. Para uma demonstração dessas propriedades, consulte (Zwicker, 1963), página 111. Na figura 6, consideramos a trajetória do foco F_2 da elipse enquanto ela se desloca sem escorregar sobre o eixo x .

Os triângulos F_1P_1K e F_2P_2K são semelhantes. Logo

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|F_1K|}{|F_2K|}. \quad (10)$$

Manipulando (10),

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|P_1F_1| \cdot |P_2F_2|}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2}.$$

Além disso

$$\frac{|F_1K|}{|F_2K|} = \frac{|F_1K| + |F_2K|}{|F_2K|} - \frac{|F_2K|}{|F_2K|} = \frac{2a}{|F_2K|} - 1.$$

Portanto,

$$\frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{2a}{|F_2K|} - 1. \quad (11)$$

A medida do segmento P_2F_2 representa a componente y da *roulette* da elipse, enquanto pela Proposição 9, a *roulette* de uma elipse é uma curva regular admitindo uma parametrização pelo comprimento de arco. Pelo Corolário 10, $|F_2K| = \pm y(s) (x'(s))^{-1}$, sua substituição em (11), resulta em:

$$\frac{b^2}{y(s)^2} = \pm \frac{2a}{y(s)} (x'(s)) - 1 \quad (12)$$

sendo s o parâmetro comprimento de arco da *roulette*. Então

$$x'(s) = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)},$$

o que demonstra a Proposição. □

Observação 13. Considerações sobre a equação $x'(s) = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)}$:

- (a) Quando $a = b$, a elipse se torna um círculo de raio a com os "focos" coincidentes em $F_1 = F_2$, e a roulette se transforma em uma linha reta na forma $y = a$;
- (b) No limite em que b tende a zero (ou seja, $\lim_{b \rightarrow 0} x'(s)$), a elipse se reduz a um segmento de linha de comprimento $2a$, com F_2 em uma das extremidades do segmento. Nesse cenário, a roulette é composta por semicírculos com raio de $2a$.

Agora, consideremos a situação da roulette de uma hipérbole. A hipérbole com focos F_1 e F_2 consiste nos pontos K do plano tais que a diferença das distâncias aos focos (raios focais) satisfazem a condição:

$$|F_1K| - |F_2K| = \pm 2a; \tag{13}$$

onde $a < c$. Os semi-eixos são denotados por a e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

De maneira semelhante aos casos da parábola e da elipse, empregamos as propriedades da tangente r à hipérbole para derivar a equação da nodária.

Proposição 14. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ a parametrização da nodária pelo comprimento de arco. Então

$$x'(s) = \pm \frac{y(s)^2 - b^2}{2ay(s)}, \tag{14}$$

sendo a e b os semi-eixos da hipérbole.

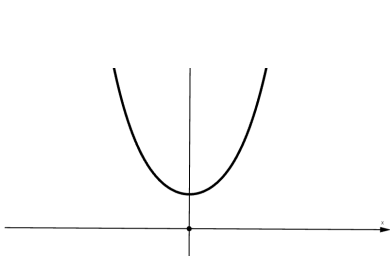


Figura 7. Catenária.

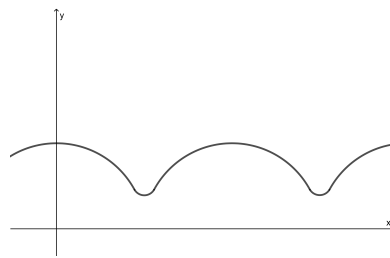


Figura 8. Ondulária.

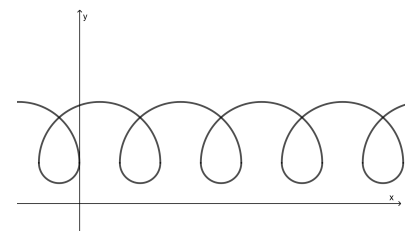


Figura 9. Nodária.

Fonte: Figuras 8 e 9 de (Teixeira; Souza, 2021)

A demonstração da proposição anterior é análoga à demonstração da Proposição 12, portanto omitiremos a sua prova. Parametrizações para as curvas de Delaunay são apresentadas em (Medeiros, 1988).

3.3. O cálculo das curvaturas médias das superfícies Delaunay.

Denominamos *superfícies de Delaunay* as superfícies geradas pela rotação das curvas de Delaunay em torno do eixo x . Assim, a rotação das curvas de Delaunay — catenária, ondulária e nodária — ao redor do eixo x geram, respectivamente, as superfícies chamadas catenoide, onduloide e nodoide. A partir das equações (8), (9) e (14), observamos que essas curvas satisfazem equações do tipo $x'(s) = f(y(s))$. Essa relação nos possibilita enunciar um lema técnico que simplifica o cálculo da curvatura média dessas superfícies.

Lema 15. *Se a curva geradora de uma superfície de revolução é p.p.c.a e obedece à relação $x'(s) = f(y(s))$, com f sendo uma função de y , a curvatura média H da superfície pode ser calculada pela fórmula:*

$$H = \frac{1}{2} \left(f'(y(s)) + \frac{f(y(s))}{y(s)} \right). \quad (15)$$

Demonstração. Se $x'(s)$ é como acima, então pela equação (4):

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(\frac{x''(s)}{y'(s)} + \frac{x'(s)}{y(s)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(f(y(s)))'}{y'(s)} + \frac{f(y(s))}{y(s)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f'(y(s))y'(s)}{y'(s)} + \frac{f(y(s))}{y(s)} \right) = \frac{1}{2} \left(f'(y(s)) + \frac{f(y(s))}{y(s)} \right). \end{aligned}$$

□

Agora, prosseguiremos com os cálculos das curvaturas médias das superfícies de Delaunay:

- Para o cálculo da curvatura média do catenoide, segue da equação (8) que $f(y) = \pm \frac{c}{y}$, considerando apenas o caso positivo, obtemos:

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{c}{y^2} + \frac{c/y}{y} \right) = 0.$$

O caso, $-c/y$ retorna o mesmo resultado. Pelos cálculos acima, a curvatura média do catenoide é $H = 0$, sendo esta uma superfície mínima, a única superfície mínima de revolução (ver (Carmo, 2010)).

- Considerando os casos do cilindro, da esfera, do onduloide e do nodoide, segue das equações (9) e (14) que $f(y) = \pm \frac{y^2 \pm b^2}{2ay}$. Para maior clareza, analisaremos o caso em que $f(y) = \frac{y^2 + b^2}{2ay}$, cuja substituição em (15) resulta em:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(\frac{4ay^2 - (y^2 + b^2)2a}{4a^2y^2} + \frac{y^2 + b^2}{2ay^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4ay^2 - 2ay^2 - 2ab^2 + 2ay^2 + 2ab^2}{4a^2y^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{4ay^2}{4a^2y^2} = \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

A aplicação de (15) ao demais casos retornam $H = \pm 1/2a$.

Baseado no que foi apresentado, se uma superfície de revolução S , cuja curva geradora $(x(s), y(s), 0)$ é p.p.c.a, satisfaz a equação

$$x'(s) = \pm \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)},$$

com constantes a e b , então a curvatura média de S é diferente de zero.

A proposição a seguir é essencial para a conclusão do Teorema de Delaunay.

Proposição 16. *Uma superfície de revolução S possui curvatura média constante $H \neq 0$ se, e só se, a curva geradora de S satisfaz*

$$y^2 \pm 2ayx'(s) \pm b^2 = 0, \quad a \text{ e } b \text{ constantes.} \quad (16)$$

Demonstração. Graças à regularidade de S , em uma vizinhança local, sua curva geradora pode ser representada como o gráfico de uma função. Em outras palavras, a curva geradora pode ser descrita por $(x, \tilde{y}(x), 0)$ e S sendo parametrizada por

$$\mathcal{X}(x, v) = (x, \tilde{y}(x) \cos v, \tilde{y}(x) \sin v).$$

Recorrendo à expressão da curvatura média (3) com os elementos $E = 1 + \tilde{y}'(x)^2$, $G = \tilde{y}(x)^2$, $N = \mathcal{X}_x \times \mathcal{X}_v / EG$, $e = -\tilde{y}''(x)/E^{3/2}$ e $g = y/\sqrt{E}$ teremos:

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right). \quad (17)$$

Dado que a curvatura média de S é não nula, podemos expressá-la como $H = \frac{1}{2a} > 0$, tornando (17) em:

$$a \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \tilde{y}(x) = 0.$$

Multiplicando os dois membros desta última expressão por $2\tilde{y}'(x)$:

$$2a\tilde{y}'(x) \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - 2\tilde{y}(x)\tilde{y}'(x) = 0. \quad (18)$$

Integrando (18) em x , obtemos:

$$-\frac{2a\tilde{y}(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} - \tilde{y}(x)^2 = \pm b^2, \quad (19)$$

em que b^2 é uma constante. Considerando a curva geradora reparametrizada pelo seu comprimento de arco $s = \int_0^x \sqrt{1 + \tilde{y}'(t)^2} dt$, teremos $x'(s) = (1 + \tilde{y}'(x)^2)^{-1/2}$, tornando (19) em:

$$-2ay(s)x'(s) - y(s)^2 = \pm b^2. \quad (20)$$

Em que (20) é equivalente às equações (9) e (14). A análise do caso $a < 0$ retorna o resultado complementar. \square

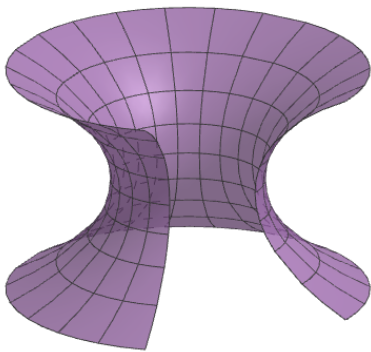


Figura 10. Uma parte aberta do catenoide obtida pela revolução parcial da catenária.

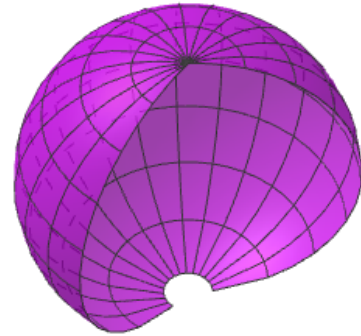


Figura 11. Parte aberta de uma esfera obtida pela revolução parcial de um arco de circunferência.

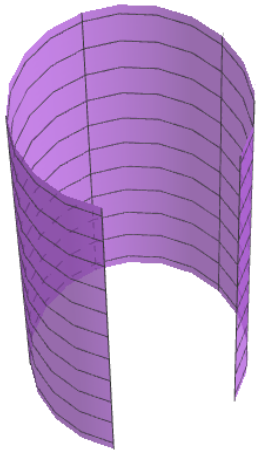


Figura 12. Parte aberta de um cilindro obtida pela revolução parcial de uma reta.

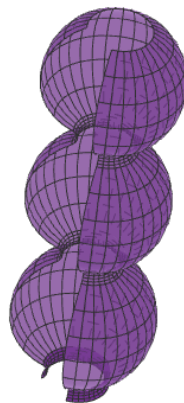


Figura 13. Uma parte aberta do onduloide obtida pela revolução parcial da ondulária (fig. 8)

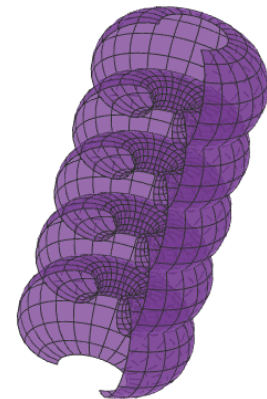


Figura 14. Parte aberta do nodoide obtida pela revolução parcial da nodária (fig. 9).

Fonte: Figuras 10, 11 e 12 de acervo próprio e figuras 13 e 14 de (Teixeira; Souza, 2021)

A Proposição 16 nos permite concluir que as curvas geradoras de superfícies de revolução com curvatura média constante, para $H \neq 0$, são precisamente as curvas de Delaunay. Reciprocamente, os resultados obtidos nas Proposições 11, 12 e 14, junto com o fato de que as superfícies de Delaunay apresentam curvatura média igual a zero ou $\pm 1/2a$, conduzem diretamente ao Teorema 8, conhecido como o Teorema de Delaunay.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As superfícies de revolução com curvatura média constante são de grande interesse no campo da geometria diferencial, oferecendo vastas oportunidades para investigações teóricas e aplicações práticas. Essas superfícies, geradas pela rotação de curvas planas em torno de um eixo, incluem exemplos como catenoides, esferas e outras formas intrigantes. A análise de suas propriedades geométricas, incluindo a relação com as roulettes das cônicas, revela padrões fascinantes e conexões profundas com outras áreas da ciência. O estudo dessas superfícies não só enriquece a compreensão da geometria diferencial, mas também abre portas para aplicações em diversas disciplinas científicas. A interação entre a teoria matemática e suas aplicações práticas no estudo dessas superfícies destacando sua relevância como um tema interdisciplinar. Isso cria oportunidades para novas descobertas e avanços tanto na matemática pura quanto na aplicada.

REFERÊNCIAS

- BAR-ZIV, R.; MOSES, E. Instability and “pearling” states produced in tubular membranes by competition of curvature and tension. **Physical review letters**, APS, v. 73, n. 10, p. 1392, 1994.
- BARRIENTOS, J. O. **Superfícies Helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensional**. 1995. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1995.
- BESANT, W. H. **Notes on roulettes and glissettes**. [S.l.]: Deighton, Bell, 1890.
- CAÑESTRO, I. L. **Epicloides**. 2024. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hAqAh8zb>>. Acesso em: 25 de agosto 2024.
- CAÑESTRO, I. L. **Hipocicloides**. 2024. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/UgwAVFG>>. Acesso em: 25 de agosto 2024.
- CARMO, M. P. D.; DAJCZER, M. Helicoidal surfaces with constant mean curvature. **Tohoku Mathematical Journal, Second Series**, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 34, n. 3, p. 425–435, 1982.
- CARMO, M. P. do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

- CARVALHO, M. T. C. R. de. **Evolutas, Involutas e Roulettes**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, 2013.
- DELAUNAY, C. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 6, p. 309–315, 1841.
- DEULING, H.; HELFRICH, W. A Theoretical explanation for the Myelin shapes of red Blood Cells. **Blood Cells**, 1977.
- EELLS, J. The surfaces of Delaunay. **The Mathematical Intelligencer**, Springer-Verlag New York, v. 9, n. 1, p. 53–57, 1987.
- ISENBERG, C. **The science of soap films and soap bubbles**. [S.l.]: Dover: New York, NY, USA, 1992.
- KENMOTSU, K. Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. **Tohoku Mathematical Journal, Second Series**, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 32, n. 1, p. 147–153, 1980.
- LAPLACE, P.-S. **Supplément au dixième livre du Traité de mécanique céleste, sur l'action capillaire**. Paris, France: Courcier, 1806.
- LOCKWOOD, E. H. **A book of curves**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967.
- MEDEIROS, N. A. C. **Superfícies com curvatura média constante não nula**. 1988. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1988.
- MEDEIROS, N. A. C.; RIPOLL, J. B. Hipersuperfícies Invariantes de Curvatura Média Constante. **Matemática Universitária**, 1991.
- OPREA, J. **The mathematics of soap films: explorations with Maple®**. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, 2000. v. 10.
- PERERA, B.; PARAGODA, T.; DHARMASENA, D. A survey of Delaunay surfaces with applications in capillary surfaces. **Journal of Geometry and Symmetry in Physics**, Bulgarian Academy of Sciences, Institute of Mechanics Sofia, Bulgaria, v. 64, p. 51–65, 2022.
- PLATEAU, J. A. F. **Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires: Tome premier**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1873. v. 2.
- PULOV, V. I.; MLADENOV, I. M. Rotating liquid drops and Delaunay surfaces. **Journal of Geometry and Symmetry in Physics**, 2019.
- SOUZA, G. F. de. **Superfícies em \mathbb{R}^3 de Curvatura Média Constante Invariantes por Subgrupos a 1-parâmetro de Isometrias**. 2005. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- TEIXEIRA, S. R. **Superfícies Helicoidais com curvatura constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$** . 2024. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2024.
- TEIXEIRA, S. R.; SOUZA, G. F. de. O Teorema de Representação de Kenmotsu para superfícies de revolução com curvatura média prescrita. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 19–45, 2021.
- TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. [S.l.]: Editora Blucher, 2008.
- THOMPSON, S. D. W. **On Growth and Form.[With Illustrations.]**. [S.l.]: Cambridge, 1917.
- WEISSTEIN, E. W. Roulette. <https://mathworld.wolfram.com/>, Wolfram Research, Inc., 2003. Acesso em: 25 de agosto 2024.

YONEDA, M. Tension at the surface of sea-urchin egg: a critical examination of cole's experiment. **Journal of Experimental Biology**, The Company of Biologists Ltd, v. 41, n. 4, p. 893-906, 1964.

YOUNG, T. An essay on the cohesion of fluids. In: THE ROYAL SOCIETY LONDON. **Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. [S.l.], 1832. p. 171-172.

ZWIKKER, C. **The advanced geometry of plane curves and their applications**. [S.l.]: Dover, 1963.