



Paralelogramos: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática

Parallelograms: five solved problems from the International Mathematics Olympiad lists

Paralelogramos: cinco problemas resueltos de las listas de la Olimpiada Internacional de Matemáticas

Juan López Linares

<jlopez@usp.br>

Universidade de São Paulo, Pirassununga, S.P., Brasil



<<https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>>

Lattes <<http://lattes.cnpq.br/5290499079222806>>

Resumo

Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática são discutidos em detalhe. Apresenta-se uma introdução dos conteúdos relativos a paralelogramos. As demonstrações envolvidas nas resoluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas, utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores de matemática que atuam no ensino médio e interessem-se em problemas mais desafiadores.

Palavras-chave: Olimpíadas internacionais de Matemática. GeoGebra. Problemas resolvidos. Ensino Médio e Universitário. Geometria.

Abstract

Five problems proposed for the International Mathematics Olympiad are discussed in detail. An introduction to the contents relating to parallelograms are presented. The demonstrations involved in the solutions are complemented by the availability of the respective links to the interactive figures, using GeoGebra. It is expected that the article can be appreciated both by students preparing for the final stages of national or international competitions, and by teachers who work in teaching and are interested in more challenging problems.

Keywords: International Mathematics Olympiads. GeoGebra. Problems resolved. High School and University. Geometry.

Resumen

Se analizan en detalle cinco problemas propuestos para la Olimpiada Internacional de Matemáticas. Se presenta una introducción a los contenidos relacionados con los paralelogramos. Las demostraciones involucradas en las soluciones se complementan con la disponibilidad de los respectivos enlaces a las figuras interactivas, utilizando GeoGebra. Se espera que el artículo pueda ser apreciado tanto por estudiantes que se preparan para las etapas finales de competencias nacionales o internacionales, como por profesores que trabajan en la docencia y están interesados en problemas más desafiantes.

Palabras-Clave: Olimpíadas Internacionales de Matemáticas. GeoGebra. Problemas resueltos. Escuela Secundaria y Universidad. Geometría.

1. INTRODUÇÃO

Paralelogramos são quadriláteros com as seguintes propriedades: lados opostos paralelos e congruentes, ângulos opostos congruentes e as diagonais bisetam-se nos seus pontos médios respectivos. Adicionalmente, cada uma das diagonais por separado divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes. Essas propriedades permitem resolver problemas envolvendo medidas de ângulos, comprimentos de lados e perímetros de figuras, além de relações geométricas em situações mais complexas, como o cálculo de áreas e volumes em geometria tridimensional.

Neste artigo são apresentados e resolvidos cinco problemas envolvendo paralelogramos, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os mesmos foram propostos na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad). Embora úteis, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas olímpicos não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções encontram-se frequentemente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores de matemática do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras resoluções disponíveis, as discussões no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Várias publicações estudaram como os estudantes aprendem a definição e as propriedades dos paralelogramos (Santos; Santos, 2019), (ARAÚJO; SILVA; BELLEMAIN, 2020), (VILAÇA, 2020). Outras pesquisas apontaram que o ensino de Geometria Plana, utilizando o software GeoGebra, proporciona ricas possibilidades de visualização do processo de aprendizagem que são difíceis de serem trabalhadas em um ambiente comum (Silva, 2018), (Menegalli; Brandl, 2022), (Ferreira, 2010), (Pereira, 2012), (Cruz; Filho, 2019) e (Alves, 2020).

Para o leitor iniciante recomenda-se consultar os livros de Geometria (Muniz-Neto, 2013), (Dolce, 2013) e (Barbosa, 2007). De muita utilidade são as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda (Holanda, 2011), do Prof. Rodrigo Pinheiro (Pinheiro, 2006) e do Prof. Cícero Thiago (Thiago, 2006). Também serviram como referência os livros de Geometria Analítica (Frensel; Crissaff, 2017) e Matemática Discreta (Morgado; Carvalho, 2015) adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre o Teorema de Ptolomeu (Linares *et al.*, 2022), Incírculos e ex-incírculos (Linares; Santos; Jesus, 2021) e Desigualdades (Linares; Bruno-Alfonso; Barbosa, 2020). Na Seção 2 é feita uma breve introdução de alguns conceitos básicos, utilizados neste trabalho. O leitor já familiarizado com a teoria pode passar diretamente para a Seção 3, onde são enunciados e resolvidos cinco problemas IMO.

2. ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS UTILIZADOS NESTE TRABALHO

Definição 1 (Paralelogramo). *Quadrilátero com dois pares distintos de lados paralelos.*

Proposição 2. *Se $AB = CD$ e $AB \parallel CD$, então $ABCD$ é um paralelogramo.*

A Figura 1 mostra uma construção geométrica para a Proposição 2.

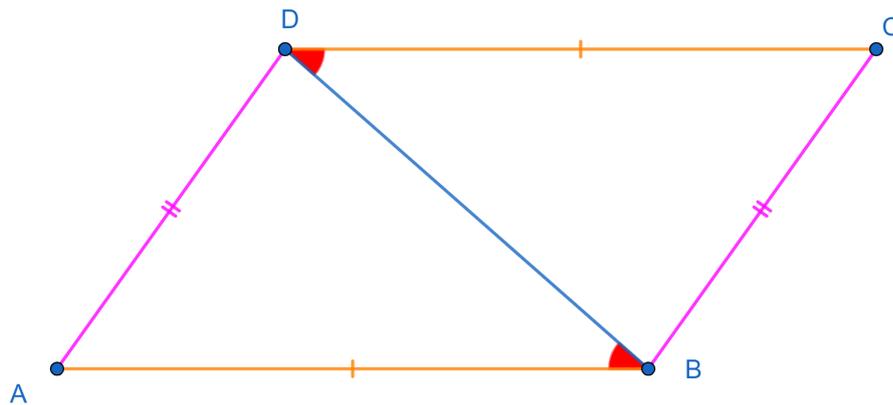


Figura 1. Construção geométrica para a Proposição 2. Versão interativa aqui.

Prova. *Por alternos entre paralelas tem-se: $\angle ABD = \angle CDB$. Pelo critério de congruência LAL segue que $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. Logo, $AD = CB$.*

A Figura 2 mostra duas transformações isométricas. Isto é, aquelas em que as distâncias entre os pontos não mudam. O $\triangle B'C'D'$ é obtido pela reflexão do $\triangle BCD$ na reta BC . A reflexão do $\triangle BCD$ relativo a mediatriz do segmento BC resulta no $\triangle B''C''D''$, coincidente com o $\triangle DAB$.

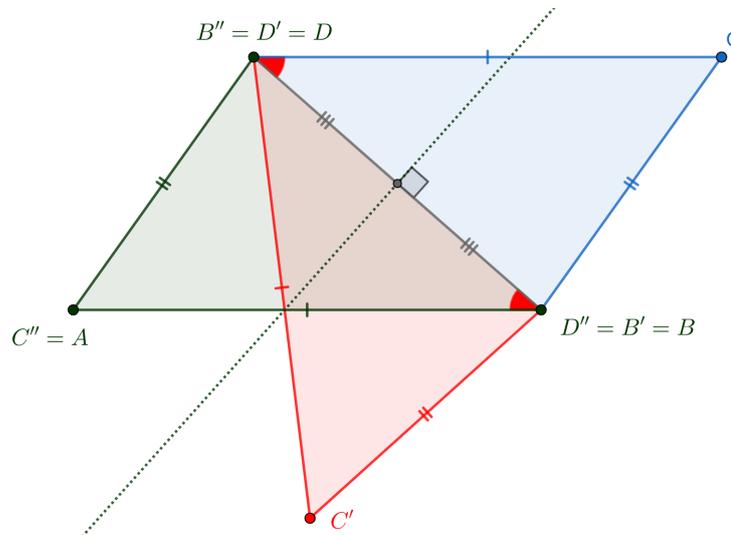


Figura 2. Duas transformações isométricas relativas à Proposição 2. Versão interativa aqui.

Proposição 3. Num Paralelogramo valem as seguintes propriedades: i) Os ângulos opostos são congruentes; ii) Os lados opostos são igual medida; iii) As diagonais cortam-se nos seus pontos médios.

A Figura 3 mostra uma primeira construção geométrica para a Proposição 3.

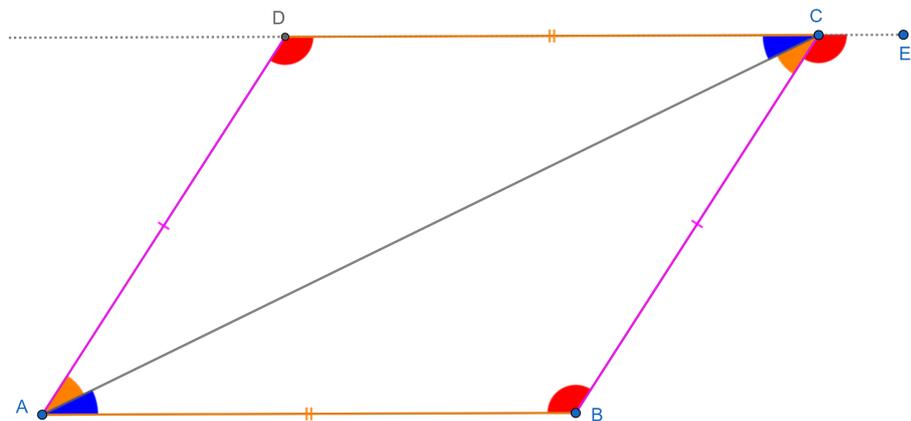


Figura 3. Primeira construção geométrica para a Proposição 3. Versão interativa aqui.

Prova. i) Por correspondentes entre paralelas vale: $\angle ADC = \angle BCE$. Por alternos internos entre paralelas tem-se: $\angle BCE = \angle ABC$. Logo, $\angle ADC = \angle ABC$. Analogamente, mostra-se que: $\angle DAB = \angle BCD$.

ii) Traça-se a diagonal AC. Por serem alternos internos entre paralelas tem-se: $\angle DAC = \angle ACB$. Os triângulos ABC e CDA são congruentes pelo critério LAAo. Segue que $CB = AD$, $AB = CD$ e $\angle BAC = \angle DCA$.

iii) É construída a diagonal BD e marcado o ponto $M = AC \cap BD$. Por alternos internos entre paralelas $\angle ABD = \angle CDB$ e por opostos pelo vértice $\angle AMD = \angle CMB$. Pelo critério de congruência ALA tem-se: $\triangle ADM \equiv \triangle CBM$. Logo, $AM = MC$ e $BM = MD$. Em palavras, as diagonais interceptam-se nos seus pontos médios (Figura 4).

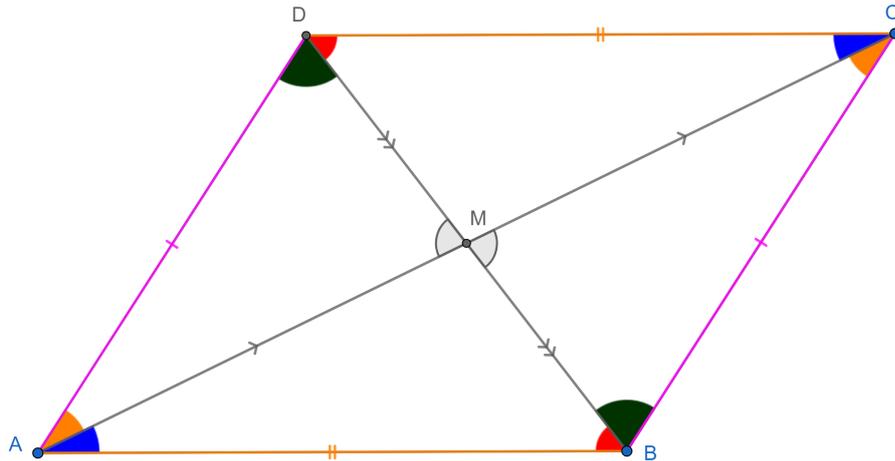


Figura 4. Segunda construção geométrica para a Proposição 3. Versão interativa aqui.

Teorema 4 (Relação de Stewart). *Seja D um ponto no lado BC do triângulo ABC . Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = x$, $CD = y$ e $AD = z$. Vale que:*

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Ou equivalentemente:

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy. \quad (1)$$

Esta relação permite encontrar o comprimento de uma ceviana AD sem precisar conhecer os ângulos por ela determinados. Em geometria, as cevianas são segmentos de retas que partem de um vértice do triângulo até um ponto no lado oposto. Medianas, alturas e bissetrizes são casos particulares de cevianas. A Figura 5 permite acompanhar a prova.

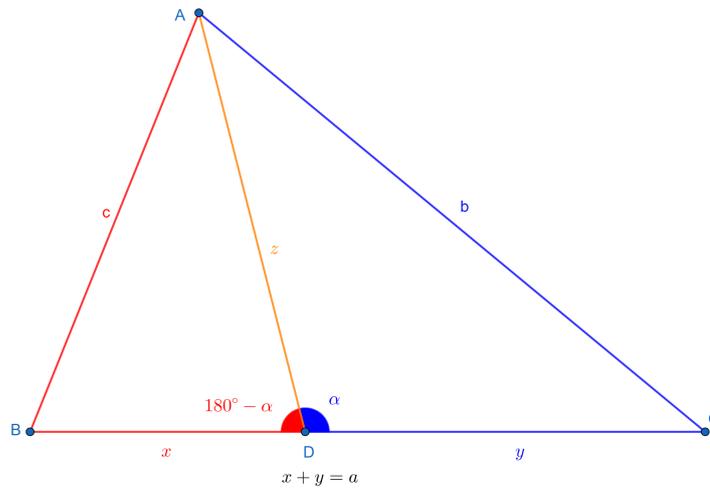


Figura 5. Guia para a demonstração do Teorema 4. [Versão interativa aqui.](#)

Prova. Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ABD$ tem-se:

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \alpha).$$

Mas $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Logo,

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos(\alpha),$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z \cos(\alpha). \quad (2)$$

Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ACD$ tem-se:

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha),$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z \cos(\alpha). \quad (3)$$

Pela adição de (2) e (3) segue:

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + z^2 \frac{a}{xy},$$

$$\frac{b^2x + c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy},$$

$$z^2 = \frac{b^2x + c^2y}{a} - xy.$$

Ainda com referência a Figura 5, no caso em que D é o ponto médio de BC vale $x = y = \frac{a}{2}$ e $z = m_a$ (mediana relativa ao vértice A). Utilizando (1) encontra-se:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

3. PROBLEMAS OLÍMPICOS RESOLVIDOS

A seguir abordamos um problema da IMO 1967, realizada na cidade de Cetinje, antiga Iugoslávia, atual República de Montenegro. Este é o P4 lista longa (LL), proposto pela delegação da Bulgária (Djukic *et al.*, 2011). Neste exploramos os conceitos de paralelogramo, desigualdades e a relação de Stewart.

Problema 1. Suponha-se que as medianas m_a e m_b no triângulo ABC sejam ortogonais. Provar que: (a) As medianas correspondem aos lados de um triângulo retângulo. (b) A desigualdade

$$5(a^2 + b^2 - c^2) \geq 8ab$$

é válida, onde a, b e c são comprimentos dos lados do triângulo ABC .

A Figura 6 ilustra uma construção geométrica inicial.

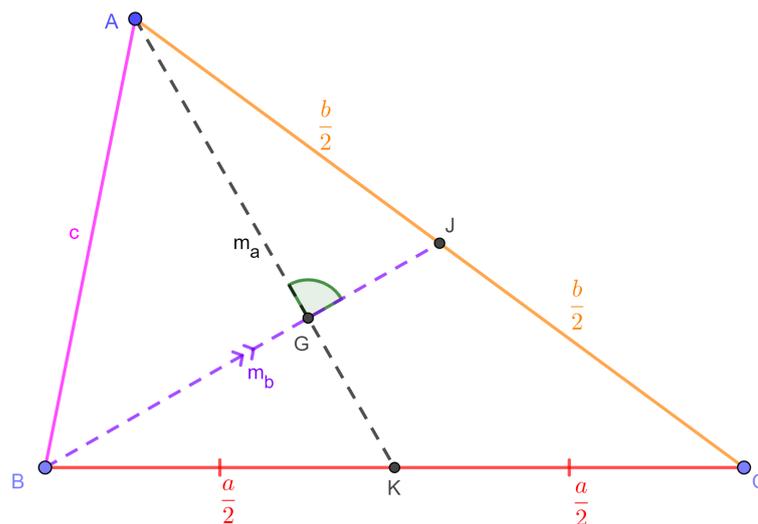


Figura 6. Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa aqui.

(a) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, $G = m_a \cap m_b$ e J, K e L os pontos médios dos segmentos AC, BC e CD , respectivamente (Figura 7). O segmento JK é base média do $\triangle ABC$. Logo, $JK \parallel AB \parallel LC$ e

$$JK = LC = \frac{c}{2}.$$

Segue que $JKCL$ é um paralelogramo, $JL \parallel KC \parallel BK$ e

$$JL = KC = BK = \frac{a}{2}.$$

Com isto, $JBKL$ também é um paralelogramo e $KL = BJ = m_b$. Por correspondentes entre paralelas

$$\angle LKA = \angle JGA = 90^\circ.$$

Seja m_c a mediana relativa ao vértice C no $\triangle ABC$ e L' o ponto médio do lado AB . Como $AL' \parallel LC$ e $AL' = LC = \frac{c}{2}$, então $AL'CL$ é um paralelogramo. Segue que $AL = L'C = m_c$. Ou seja, as medidas dos lados do $\triangle AKL$, retângulo em K , são iguais as medianas m_a, m_b e m_c do $\triangle ABC$.

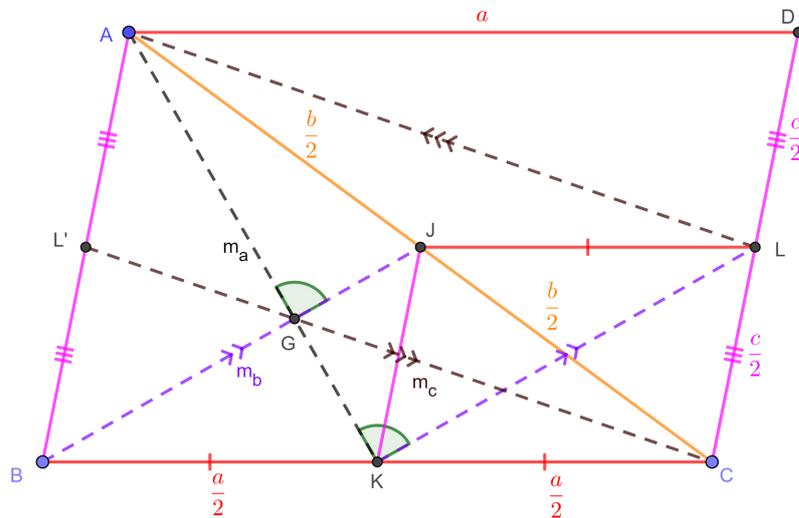


Figura 7. Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui.

(b) Pelo Teorema 4 (Relação de Stewart) pode ser escrito:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \tag{4}$$

$$4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2, \tag{5}$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{6}$$

Somando (4) e (5) encontra-se:

$$4(m_a^2 + m_b^2) = a^2 + b^2 + 4c^2. \tag{7}$$

Do $\triangle AKL$, retângulo em K , segue que $m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$. Logo, (7) transforma-se em:

$$4m_c^2 = a^2 + b^2 + 4c^2. \tag{8}$$

De (6) e (8) encontra-se:

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 4c^2,$$

$$a^2 + b^2 = 5c^2,$$

$$a^2 + b^2 - 5c^2 = 0.$$

Somando e subtraindo $4(a^2 + b^2)$ segue:

$$5(a^2 + b^2 - c^2) = 4(a^2 + b^2). \tag{9}$$

De $(a - b)^2 \geq 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab, \\ 4(a^2 + b^2) &\geq 8ab. \end{aligned} \tag{10}$$

Portanto, juntando (9) e (10) conclui-se:

$$5(a^2 + b^2 - c^2) \geq 8ab.$$

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, antiga Iugoslávia, atual República de Montenegro. O problema a seguir foi o P8 da LL, P1 da competição e proposto pela delegação da antiga Checoslováquia (Djukic et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de paralelogramo, trigonometria e a Lei dos Senos.

Problema 2. Sejam $ABCD$ um paralelogramo; $AB = a$, $AD = 1$, $\angle DAB = \alpha$ e os três ângulos do $\triangle ABD$ agudos. Provar que as quatro circunferências k_a , k_b , k_c e k_d , cada uma de raio 1, cujos centros são os vértices A , B , C e D , cobrem o paralelogramo se, e somente se,

$$a \leq \cos(\alpha) + \sqrt{3} \operatorname{sen}(\alpha).$$

A Figura 8 ilustra uma construção geométrica inicial.

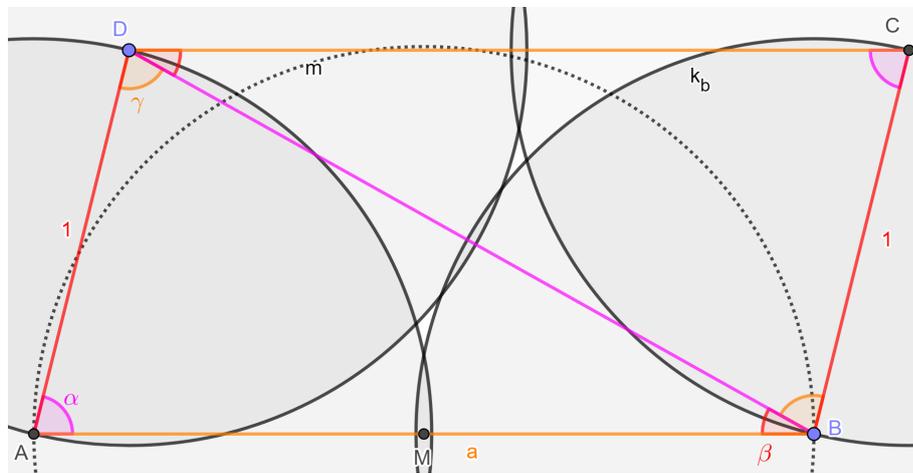


Figura 8. Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa aqui.

A seguir são discutidos detalhes da construção da figura anterior. Seja M o ponto médio do segmento AB . Traça-se uma circunferência m centrada em M e de raio MA . Para garantir que o $\triangle ABD$ seja acutângulo o ponto D deve estar localizado fora de m . O caso limite é quando $D \in m$ que corresponde a $\angle ADB = \gamma = 90^\circ$. Traça-se k_a e $D \in k_a$. O ponto C fica determinado pela interseção das paralelas a AB passando por D e a AD passando por B . Sendo o $\triangle ABD$ acutângulo $DM > AM = BM$ e para garantir que k_a e k_b cubram todos os pontos do segmento AB deve-se ter $a \leq 2$.

Seja X um ponto no interior ou na fronteira do paralelogramo $ABCD$. X é coberto por pelo menos uma das circunferências k_a, k_b, k_c ou k_d (todas de raio 1) quando $XA \leq 1$ ou $XB \leq 1$ ou $XC \leq 1$ ou $XD \leq 1$. Como $ABCD$ é um paralelogramo vale a congruência: $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$. O problema pode ser estudado no $\triangle ABD$ e resultados análogos serão válidos para o $\triangle CBD$.

Sejam O e r centro e raio do circuncírculo do $\triangle ABD$ e X um ponto no interior do mesmo triângulo. X é coberto por pelo menos uma das circunferências k_a, k_b ou k_d quando $XA \leq r$ ou $XB \leq r$ ou $XD \leq r$ (Figura 9). Portanto, deve-se ter $r \leq 1$. Pelo $\triangle DOA$ (equilátero para $r = 1$) segue $\angle DOA \geq 60^\circ$ (ângulo central) e $\angle DBA = \beta \geq 30^\circ$ (ângulo inscrito).

Pela Lei dos Senos aplicada no $\triangle ABD$ escreve-se:

$$\frac{a}{\text{sen}(\gamma)} = 2r.$$

Mas $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ e

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{a}{\text{sen}(\alpha + \beta)} &= 2r, \\ a &= 2r \text{sen}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Como $180^\circ > \alpha + \beta \geq 90^\circ$ o máximo da função seno acontece para o menor valor de β .

Logo,

$$\begin{aligned} r \text{sen}(\alpha + \beta) &\leq 1 \cdot \text{sen}(\alpha + 30^\circ), \\ a &\leq 2 \text{sen}(\alpha + 30^\circ). \end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica para o seno da soma de dois ângulos segue:

$$a \leq 2(\text{sen}(\alpha) \cos(30^\circ) + \text{sen}(30^\circ) \cos(\alpha)),$$

$$a \leq 2 \left(\text{sen}(\alpha) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cos(\alpha) \right),$$

$$a \leq \sqrt{3} \text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha).$$

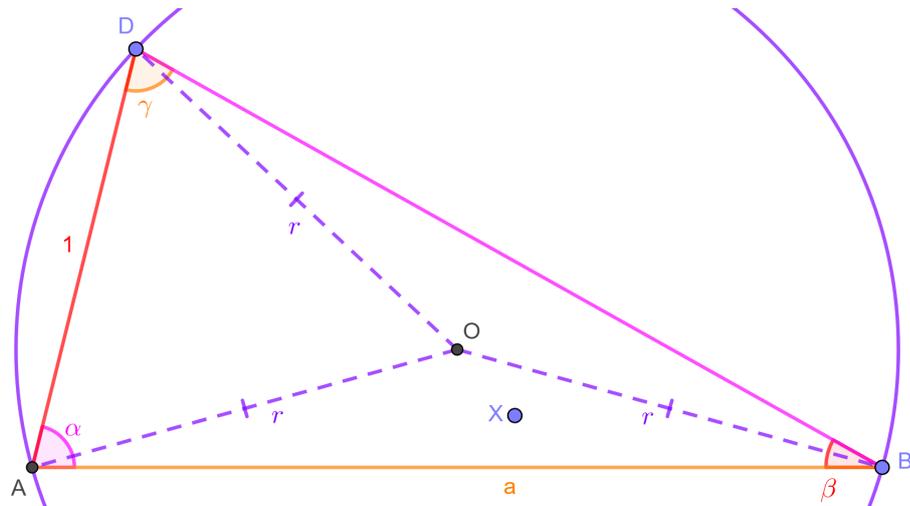


Figura 9. Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui.

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, capital da Hungria. O problema que segue foi o P9 da SL e proposto pela delegação do Reino Unido (Djukic et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de paralelogramo, base média e circuncentro.

Problema 3. Sejam ABC um triângulo e P um ponto dentro dele tal que:

$$\angle PAC = \angle CBP.$$

Sejam L e M os pés das perpendiculares de P a BC e CA , respectivamente. Seja D o ponto médio de AB . Provar que $DL = DM$.

A Figura 10 ilustra uma construção geométrica inicial.

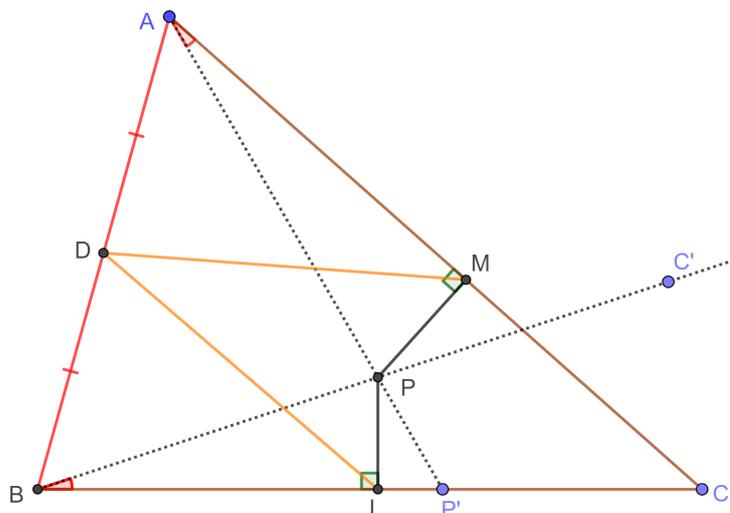


Figura 10. Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui.

Para implementar, de forma interativa, a hipótese $\angle PAC = \angle CBP$ coloca-se um ponto auxiliar $P' \in BC$. Este determina o ângulo $\alpha = \angle P'AC$. A seguir é feita uma rotação de ângulo α do ponto C , em sentido anti-horário, centrada em B , para gerar o ponto C' . A interseção das semirretas AP' e BC' determina o ponto P .

Sejam X e Y os pontos médios dos segmentos AP e BP , respectivamente (Figura 11). Como XD e YD são bases médias dos triângulos APB e BPA , então o quadrilátero $XDYP$ é um paralelogramo. Ou seja, $XD = YP$ e $XP = YD$.

Nos triângulos retângulos AMP e BLP os segmentos XM e YL são medianas. Logo, $XM = XP$ e $YL = YP$. Em outras palavras, os pontos X e Y são centros (circuncentros) das circunferências circunscritas aos $\triangle AMP$ e $\triangle BLP$, respectivamente.

O ângulo central $\angle PXM$ é duas vezes ou ângulo inscrito $\angle PAM = \alpha$. Ou seja, $\angle PXM = 2\alpha$. Analogamente, o ângulo central $\angle LYP$ é duas vezes ou ângulo inscrito $\angle LBP = \alpha$. Isto é, $\angle LYP = 2\alpha$.

Por serem ângulos opostos de um paralelogramo vale que:

$$\angle DXP = \angle PYD = \beta.$$

Segue que:

$$\angle DXM = \angle LYD = 2\alpha + \beta.$$

Pelo critério de congruência LAL tem-se:

$$\triangle DXM \equiv \triangle LYD.$$

Portanto, $DM = LD$.

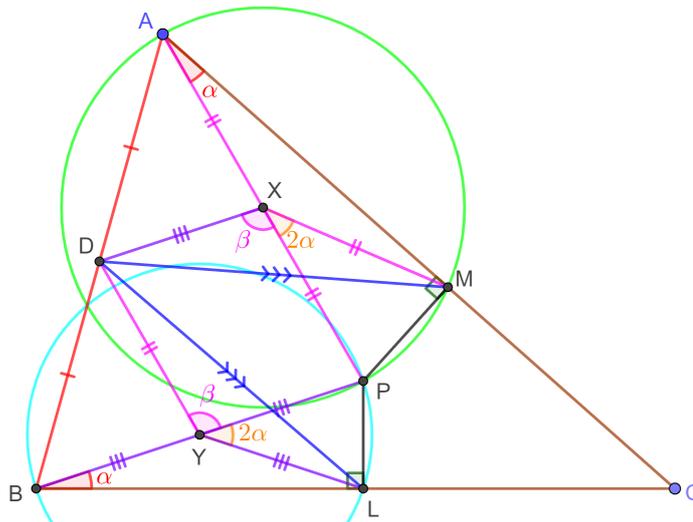


Figura 11. Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui.

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, capital da Hungria. O problema a seguir foi o P20 da SL e proposto pela delegação da Tunísia (Djukic et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de paralelogramo, rotação e congruências.

Problema 4. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Desenhem-se triângulos equiláteros ABM , CDP , BCN e ADQ , os dois primeiros para fora e os outros dois para dentro. Provar que $MN = AC$. O que pode ser dito sobre o quadrilátero $MNPQ$?

A Figura 12 ilustra uma construção geométrica inicial.

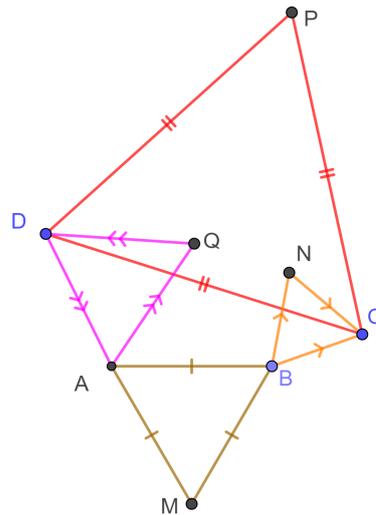


Figura 12. Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui.

Lembra-se que os ângulos internos de triângulos equiláteros são todos iguais a 60° e os três lados congruentes (Figura 13). O $\triangle MBN$ é obtido por uma rotação de sentido anti-horário, com centro em B , de 60° do $\triangle ABC$. Portanto, $MN = AC$.

Analogamente, o $\triangle QDP$ é obtido por uma rotação de sentido anti-horário, com centro em D , de 60° do $\triangle ADC$. Portanto, $QP = AC$. Ou seja, $MN = QP$. Como o segmento AC gira na mesma magnitude e sentido, mudando somente o centro de rotação, os segmentos MN e QP são paralelos. Portanto, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo ou os pontos M , N , P e Q são colineares.

Para a figura anterior foram construídas as mediatrizes dos segmentos AB , CA e BC . Os pontos P , Q e R pertencem a semirretas sobre as mediatrizes conforme o texto. Uma vez posicionado o ponto P fica definido o ângulo da base dos três triângulos isósceles semelhantes. Isto determina o posicionamento de Q e R .

Por hipótese,

$$\triangle APB \sim \triangle AQC \sim \triangle BRC.$$

Portanto,

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BC} = k.$$

Adicionalmente, como os $\triangle APB$, $\triangle AQC$ e $\triangle BRC$ são isósceles:

$$\angle PAB = \angle ABP = \angle CAQ = \angle QCA = \angle CBR = \angle RCB = \beta,$$

$$\angle BPA = \angle AQC = \angle BAC = 180^\circ - 2\beta.$$

Como

$$\angle QCR = \angle ACB,$$

$$\frac{QC}{AC} = \frac{RC}{BC} = k,$$

pelo critério de semelhança LAL, segue:

$$\triangle QCR \sim \triangle ACB.$$

Ou seja, uma roto-homotetia, com centro em C e razão $\frac{1}{k}$, transforma o $\triangle ACB$ no $\triangle QCR$ (Figura 15).

Analogamente,

$$\angle RBP = \angle CBA,$$

$$\frac{PB}{AB} = \frac{RB}{BC} = k,$$

pelo critério de semelhança LAL, segue:

$$\triangle RBP \sim \triangle CBA.$$

Em outras palavras, uma roto-homotetia, com centro em B e razão $\frac{1}{k}$, transforma o $\triangle CBA$ no $\triangle RBP$.

Das duas semelhanças anteriores:

$$\triangle RBP \sim \triangle CRQ.$$

Considerando a hipótese $RB = CR$ e a última semelhança encontra-se a congruência:

$$\triangle RBP \equiv \triangle CRQ.$$

Com isto segue:

$$RQ = BP = PA,$$

$$RP = CQ = QA.$$

Como o quadrilátero $APQR$ tem dois pares de lados opostos congruentes, então é um paralelogramo.

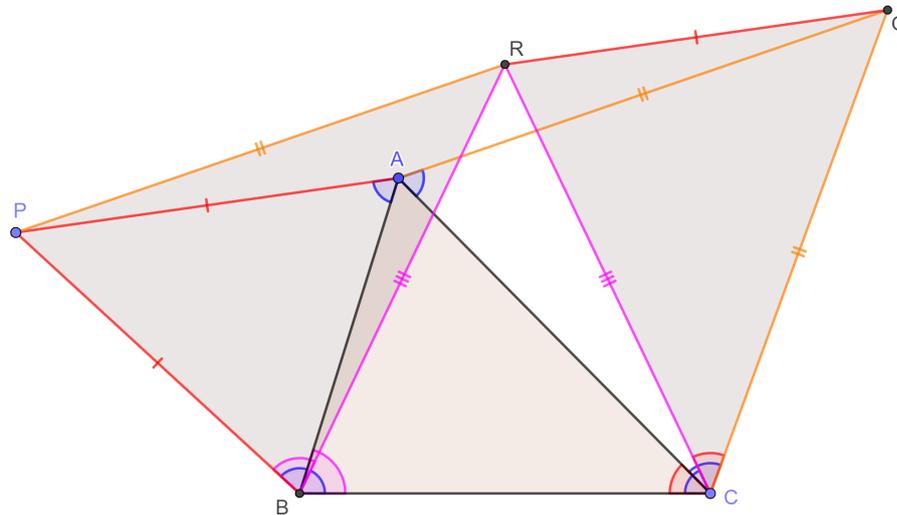


Figura 15. Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Foi feita uma rápida introdução de alguns conhecimentos básicos sobre paralelogramos. Estes são quadriláteros com as seguintes propriedades: lados opostos paralelos e congruentes, ângulos opostos congruentes e as diagonais bissetam-se nos seus pontos médios respectivos. Adicionalmente, cada uma das diagonais por separado divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes.

A seguir foram discutidos detalhadamente cinco problemas IMO. Para cada uma das figuras foi disponibilizada uma versão interativa no GeoGebra online. Isto possibilita ao leitor testar as propriedades e experimentar variações das mesmas.

Espera-se que as resoluções dos problemas sirvam de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados e treinam estudantes para participar em olimpíadas de matemática.

5. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (sdos): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software geogebra como recurso na visualização. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 13, n. 1, p. 319–349, maio 2020. ISSN 1982-5153.

ARAÚJO, J. C. D.; SILVA, A. D. P. R. D.; BELLEMAIN, P. M. B. Situações que envolvem paralelogramos e suas áreas: um estudo com licenciandos em matemática. **REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, Universidade Estadual do Parana - Unespar, v. 9, n. 19, p. 796–820, dez. 2020. ISSN 2238-5800.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. [S.l.]: SBM, Sociedade Brasileira de Matemática., 2007. ISBN 9788583371069.

CRUZ, M. P. M. da; FILHO, I. de O. H. Variação de soluções na geometria com a utilização do geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 78–101, 2019.

DJUKIC, D.; JANKOVIC, V.; MATIC, I.; PETROVIC, N. **The IMO Compendium**. Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 1441998535. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html>.

DOLCE, O. **Fundamentos de Matematica Elementar Geometria Plana - Vol.9**: Geometria plana - vol.9. [S.l.]: ATUAL (DIDATICO) - GRUPO SARAIVA, 2013. ISBN 9788535716863.

FERREIRA, R. Ensinando matemática com o geogebra. **Enciclopédia Biosfera**, v. 6, n. 10, 2010.

FRENSEL, J. D. K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. [S.l.]: SBM, 2017. ISBN 9788583371212.

HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**. 2011.

LINARES, J. L.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na olimpíada internacional de matemática. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, C.Q.D.- Revista Eletronica Paulista de Matematica, v. 18, p. 78–88, jul 2020. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v18a07-tres-problemas-sobre-desigualdades-na-olimpiada.pdf>>.

LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 117–139, nov. 2021. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>>.

LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 15–37, 2022. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>>.

MENEGALLI, R. S.; BRANDL, E. Geometria no ensino médio. **Anais da Feira do Conhecimento do IFC Campus Ibirama**, v. 3, n. 1, 2022.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. [S.l.]: Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2015.

MUNIZ-NETO, A. C. **Geometria**. [S.l.]: SBM, 2013. ISBN 9788585818937.

PEREIRA, T. d. L. M. O uso do software geogebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. **Juiz de Fora: UFJF**, 2012.

PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**. 2006.

SANTOS, E.; SANTOS, L. O papel do geogebra nas práticas de regulação do ensino da área do paralelogramo. **Quadrante**, Quadrante, p. Vol. 28 N.º 1 (2019), 2019.

SILVA, F. B. d. Conceitos de geometria plana com software geogebra: um estudo de caso no ensino médio. 2018.

THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**. 2006.

VILAÇA, M. M. Investigando o modo que licenciandos em matemática utilizam o geoplano durante atividades envolvendo as características dos quadriláteros. **REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, Universidade Estadual do Parana - Unespar, v. 9, n. 19, p. 750-772, dez. 2020. ISSN 2238-5800.