RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

OPEN ACCESS
Volume 1, Número 1, 2025
10.63801/rmat.v1i.7881
Recebido: 28/02/2025
Publicado: 08/10/2025

Os Métodos de Euler, Taylor e Runge-Kutta para Resolver Problemas de Valor Inicial

The Euler, Taylor, and Runge-Kutta Methods for Solving Initial Value Problems
Los Métodos de Euler, Taylor y Runge-Kutta para Resolver Problemas de Valores Iniciales

Maikon Júnior da Silva Nazareth
<maikon.nazareth@aluno.ufop.edu.br>
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil
<https://orcid.org/0009-0004-7938-9174>

Geraldo César Gonçalves Ferreira
<geraldocesar@ufop.edu.br>
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil
<https://orcid.org/0000-0002-7105-2372>

Resumo
O intuito deste trabalho é analisar alguns métodos numéricos de passo único para resolver problemas de valor inicial. Os principais métodos estudados foram os métodos de Euler, Taylor e de Runge-Kutta. Além disso, são discutidos resultados que dão garantias suficientes para assegurar quando tais métodos são convergentes ou são estáveis. Basicamente, se um método numérico for consistente e a solução do problemas tiver a quantidade de derivadas contínuas suficiente, é possível garantir a convergência dos métodos de Euler e de Runge-Kutta.

Palavras-chave: *Problemas de Valor Inicial. Iteração. Aproximação.*

Abstract
The aim of this paper is to analyze some single-step numerical methods for solving initial value problems. The main methods studied were the Euler, Taylor and Runge-Kutta methods. Moreover, results that provide sufficient guarantees to ensure when such methods are convergent or stable are discussed. Basically, if a numerical method is consistent and the solution of the problem has a sufficient number of continuous derivatives, it is possible to guarantee the convergence of the Euler and Runge-Kutta methods.

Keywords: *Initial Value Problems. Iteration. Approximation.*

Resumen
El propósito de este trabajo es analizar algunos métodos numéricos de un solo paso para resolver problemas de valor inicial. Los principales métodos estudiados fueron los métodos de Euler, Taylor y Runge-Kutta. Además, se discuten resultados que proporcionan garantías suficientes para asegurar cuándo dichos métodos son convergentes o estables. Básicamente, si un método numérico es consistente y la solución del problema tiene un número suficiente de derivadas contínuas, es posible garantizar la convergencia de los métodos de Euler y Runge-Kutta.

Palabras-Clave: *Problemas de valor inicial. Iteración. Aproximación.*

1. INTRODUÇÃO

Em livros de equações diferenciais e ordinárias, são apresentados métodos para encontrar explícitamente a solução de problemas de valor inicial. Todavia, raramente problemas que modelam fenômenos físicos, por exemplo, podem ser resolvidos de forma explícita. Trataremos a seguir de métodos para aproximar a solução $y(t)$ do poblema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \text{ para } a \leq t \leq b, \ y(a) = \alpha. \tag{1}$$

Na seção 2 serão apresentados alguns resultados da teoria de equações diferenciais ordinárias. Já nas seções 3, 4, 5 e 6, serão apresentados os métodos de Euler, de Taylor e de Runge-Kutta. Por fim, na seção 7, será analisada a convergência, a consistência e a estabilidade desses métodos.

Cabe observar, que os métodos apresentados neste trabalho não fornecem uma aproximação contínua da solução, mas aproximações em pontos específicos, de forma que métodos de interpolação polinomial podem ser usados para aproximar a solução de forma contínua.

2. TEORIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e teoremas da teoria de equações diferenciais e ordinárias. A principal referência utilizada nesta e nas próximas seções foi (Burden; Faires; Burden, 2016).

Definição 1. *Uma função $f(t,y)$ satisfaz a **condição de Lipschitz** na variável y em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se existir uma constante $L > 0$ tal que*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

*sempre que (t,y_1) e (t,y_2) estiverem em D. A constante **L** é chamada de **constante de Lipschitz** para f.*

Definição 2. *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é dito **convexo** se, sempre que (t_1,y_1) e (t_2,y_2) estiverem em D, então $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ também pertencer a D para todo λ em $[0,1]$.*

Teorema 3. *Suponha que $f(t,y)$ esteja definido em um conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Se existir uma constante $L > 0$ tal que*

$$\left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| \leq L, \text{ para todo } (t,y) \in D, \tag{2}$$

então f satisfaz a condição de Lipschitz em D na variável y, com constante de Lipschitz L.

Teorema 4 (Teorema da Existência e Unicidade)**.** *Seja $f(t,y)$ uma função contínua no conjunto $D = \{(t,y) \,|\, a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty\}$. Se f satisfizer a condição de Lipschitz em D na variável y, então o problema de valor inicial*

$$y'(t) = f(t,y), \ a \leq t \leq b, \ y(a) = \alpha,$$

tem uma única solução $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

Definição 5. *O problema de valor inicial dado na equação (1) é considerado um* ***problema bem-posto*** *se:*

- *Existir uma única solução, $y(t)$, para o problema;*
- *Existirem constantes $\varepsilon_0 > 0$ e $k > 0$ tais que, para qualquer ε, em $(0, \varepsilon_0)$, sempre que $\delta(t)$ for contínua com $|\delta(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a, b]$ e quando $|\delta_0| < \varepsilon$, o problema de valor inicial*
$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t),\ a \leq t \leq b,\ z(a) = \alpha + \delta_0, \tag{3}$$
tem uma solução única $z(t)$ que satisfaz
$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \text{ para todo } t \in [a, b].$$

O problema dado pela equação (3) é chamado de **problema perturbado** associado ao problema dado em (1). A motivação para esta definição reside no fato de que os métodos numéricos estão sempre associados à resolução de problemas bem-postos, já que qualquer erro de arredondamento introduzido pelos cálculos perturba o problema original. Uma observação importante é que, se o problema não for bem-posto, não há garantias de que o método numérico gere boas aproximações para a solução do problema.

O teorema a seguir fornece condições suficientes para garantir que um problema de valor inicial é bem-posto.

Teorema 6. *Suponha que $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty\}$. Se $f(t, y)$ for contínua em D e satisfizer a condição de Lipschitz em D na variável y, então o problema de valor inicial*
$$y'(t) = f(t, y),\ a \leq t \leq b,\ y(a) = \alpha,$$
é bem-posto.

3. MÉTODO DE EULER

Considere o problema de valor inicial dado na equação (1). Tomando um inteiro positivo N qualquer, faça $h = \dfrac{b-a}{N}$. E defina $t_i = a + ih$, para cada $i = 0, 1, \cdots, N$. Desta forma, obtém-se aproximações da solução do problema apenas nos pontos t_i, chamados pontos de malha, em que $h = t_{i+1} - t_i$ é o tamanho do passo.

Para deduzir esse método usa-se o Teorema de Taylor cuja demonstração pode ser encontrada em (Leithold, 2002).

Teorema 7 (Teorema de Taylor)**.** *Seja $f \in C^n[a, b]$ tal que $f^{(n+1)}$ exista em $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$. Então $\forall x \in [a, b]$ existe $\xi(x)$ entre x_0 e x tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, em que*
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ e } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

Suponha que $y(t)$ seja a solução do problema de valor inicial dado pela equação (1) tenha duas derivadas contínuas em $[a,b]$. Desta forma, calculando o polinômio de Taylor de ordem 1 em torno do ponto $t=t_i$ para aproximar $y(t_{i+1})$, obtemos que para algum $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + \frac{y''(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)^2}{2} = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{y''(\xi_i)h^2}{2} \\ &= y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i). \end{aligned} \tag{4}$$

O método de Euler encontra aproximações para o problema dado na equação (1), do tipo $w_i \approx y(t_i)$ para cada $i = 0,1,2,\cdots,N$, desprezando o termo do erro na equação (4). A equação (5) é chamada de equação de diferenças finitas.

$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \text{ para } i = 0,1,2,\cdots,N-1. \end{aligned} \tag{5}$$

4. MÉTODOS DE TAYLOR DE ORDEM SUPERIOR

De forma análoga ao que foi feito para deduzir o método de Euler, pode-se usar um polinômio de Taylor de ordem n para aproximar a solução do problema dado em (1), considerando que a solução $y(t)$, do problema, tenha $n+1$ derivadas contínuas.

Desta forma obter-se-ia a seguinte método, com $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$ e $i = 0,1,\cdots,N-1$,

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_i) \\ &= y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i)). \end{aligned} \tag{6}$$

Desprezando o termo do erro, obtém-se a equação de diferenças:

$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i) \text{ para } i = 0,1,\cdots,N-1, \end{aligned}$$

em que

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(t_i, w_i).$$

5. ERRO DE TRUNCAMENTO LOCAL

O objetivo dos métodos numéricos é obter aproximações melhores. Por isso é necessário, ter uma forma de comparar os métodos numéricos. Como os valores de $y(t)$ nos pontos de malha são em geral desconhecidos, uma ferramenta que serve para comparar tais métodos é o **erro de truncamento local**.

Definição 8. *O método de diferenças finitas para o problema de valor inicial dado em (1)*

$$w_0 = \alpha,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i), \text{ para cada } i = 0, 1, \cdots, N-1,$$

*tem o **erro de truncamento local** definido por*

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h\phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i),$$

para cada $i = 0, 1, \cdots, N-1$, em que y_i e y_{i+1} denotam a solução da equação diferencial em t_i e t_{i+1}, respectivamente.

Observe, na definição acima, que o erro de truncamento local calcula a precisão do método supondo que o método forneceu um valor exato no passo anterior.

Definição 9. *Sejam F, G funções tais que $\lim_{h\to 0} F(h) = L$ e $\lim_{h\to 0} G(h) = 0$. Se existir uma constante positiva K tal que $|F(h) - L| \leq K|G(h)|$, para h suficientemente pequeno, então dizemos que $F(h)$ converge para L com taxa de convergência $O(G(h))$ (Lê-se "O grande de $G(h)$").*

Esta definição diz que F converge para L a uma taxa parecida com a qual G converge para 0. Assim dizemos também que F é $O(G(h))$.

Teorema 10. *Se o método de Taylor de ordem n for usado para aproximar a solução de*

$$y' = f(t, y),\ a \leq t \leq b,\ y(a) = \alpha,$$

com tamanho de passo h e se $y \in C^{n+1}[a, b]$, então o erro de truncamento local será $O(h^n)$.

Prova. *Pela Definição 8 segue-se que o erro de truncamento local do método de Taylor de ordem n será*

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(t_i, y_i) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i)) = \frac{h^n}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i),$$

para cada $i = 0, 1, \cdots, N-1$, em que $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. Como $y \in C^{n+1}[a, b]$, temos que $y^{(n+1)}(t)$ é limitada em $[a, b]$ e daí $\tau_{i+1} = O(h^n)$, para cada $i = 0, 1, \cdots, N-1$.

Em particular, o método de Euler possui erro de truncamento local $O(h)$, caso y'' seja limitada. Estamos interessados em encontrar métodos númericos com erros de truncamento $O(h^p)$, em que $p > 0$, sendo p o maior possível. Observe que os métodos de Taylor de ordem superior apresentam maior taxa de convergência, porém exigem a determinação e cálculo das derivadas de $f(t, y)$ em diversos pontos. Por esta razão, esses métodos raramente são utilizados.

6. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Os métodos de Runge-Kutta possuem a ordem de convergência dos métodos de Taylor de ordem n e têm a vantagem de não ser necessário calcular as derivadas de $f(t, y)$. Para sua dedução, é necessário enunciar o

Teorema 11 (Teorema de Taylor para duas Variáveis). *Suponha que $f(t, y)$ e suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $n+1$ sejam contínuas em $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ e seja $(t_0, y_0) \in D$. Para cada $(t, y) \in D$, existem ξ entre t e t_0 e μ entre y e y_0 tais que*

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y),$$

em que

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = f(t_0, y_0) &+ \left[(t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\right] \\ &+ \left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0)\right] + \\ &\cdots + \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t - t_0)^{n-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}(t_0, y_0)\right] \end{aligned}$$

e

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(t - t_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j}\partial y^j}(\xi, \mu).$$

A função $P_n(t, y)$ é chamada de enésimo polinômio de Taylor em duas variáveis para a função f em torno de (t_0, y_0) e $R_n(t, y)$ o resto associado a $P_n(t, y)$.

Para deduzir o **método de Runge-Kutta de segunda ordem**, busca-se determinar valores para a_1, α_1 e β_1 tais que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ forneça uma aproximação para $T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}f'(t, y)$, com erro de truncamento local $O(h^2)$, que é o mesmo erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem. Como

$$f'(t, y) = \frac{df}{dt}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot y'(t) \ \ e \ \ y'(t) = f(t, y),$$

temos

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y). \tag{7}$$

Expandindo $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ em seu polinômio de Taylor de primeiro grau em torno de (t, y), teremos

$$\begin{aligned} a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) = a_1 f(t, y) + a_1\alpha_1\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_1\beta_1\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \\ + a_1 R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1), \end{aligned} \tag{8}$$

em que

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \alpha_1\beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu), \tag{9}$$

para algum $\xi \in (t, t+\alpha)$ e $\mu \in (y, y+\beta_1)$. Comparando os coeficientes de f e de suas derivadas nas equações (7) e (8), obtém-se

$$a_1 = 1; \qquad \alpha_1 = \frac{h}{2}; \quad e \quad \beta_1 = \frac{h}{2}f(t, y).$$

Caso todas as derivadas parciais de segunda ordem de f forem limitadas, então

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

é $O(h^2)$, isto é, a ordem do erro desse método é a mesma que a do método de Taylor de ordem dois. Daí chega-se a equação de diferenças finitas

$$\begin{aligned}
w_0 &= \alpha,\\
w_{i+1} &= w_i + hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{h}{2}f(t_i,w_i)\right), \text{ para cada } i=0,1,2,\cdots,N-1.
\end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta de ordens superiores necessitam de expressões ainda mais complexas para satisfazer as condições exigidas pelo método.

O método de Runge-Kutta mais usado é o **método de Runge-Kutta de quarta ordem**, que é dado a seguir na forma de equações de diferenças finitas.

$$\begin{aligned}
&w_0 = \alpha, k_1 = hf(t_i, w_i),\\
&k_2 = hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{1}{2}k_1\right), k_3 = hf\left(t_i+\frac{1}{2}, w_i+\frac{1}{2}k_2\right),\\
&k_4 = hf(t_{i+1}, w_i+k_3),\\
&w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \text{ para cada } i=0,1,\cdots,N-1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Esse método tem mesmo erro de truncamento local que o método de Taylor de ordem 4 que, pelo Teorema 10, tem erro de truncamento local $O(h^4)$, desde que a solução $y(t)$ tenha cinco derivadas contínuas em $[a,b]$.

O maior esforço computacional na aplicação dos métodos de Runge-Kutta reside em determinar a imagem da função f em vários pontos. Nos métodos de segunda ordem, o erro de truncamento local é $O(h^2)$ e o custo é calcular a imagem de f em dois pontos a cada passo. O método de Runge-Kutta de quarta ordem requer o cálculo da imagem de f quatro vezes em cada passo, e o erro de truncamento local é de $O(h^4)$. Para comparar qual método é superior fazemos o seguinte:

Para o método de Runge-Kutta de quarta ordem ser superior aos métodos de Runge-Kutta de segunda ordem, basta que o método de Runge-Kutta de quarta ordem forneça aproximações melhores com um tamanho de passo h do que o método de segunda ordem de tamanho de passo $\frac{h}{2}$. Como os métodos de Runge-Kutta de ordens superiores, embora forneçam aproximações melhores, exigem muitos cálculos a mais por passo, o método de quarta ordem se sobressai, isto é, que efetuando a mesma quantidade de cálculos por passo, o método de quarta ordem forneça melhores aproximações, o que de fato ocorre. Fazendo esta comparação com métodos de Runge-Kutta de ordens superiores, verifica-se que o método de Runge-Kutta de quarta ordem é superior.

7. CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE DO MÉTODO

Nesta seção, as principais referências utilizadas na discussão foram (Burden; Faires; Burden, 2016) e (Viana; Espinar, 2021).

Os métodos apresentados nesse trabalho são chamados **métodos de passo único** ou **métodos unipasso**, pois a aproximação no ponto de malha t_{i+1} envolve informações somente de t_i.

Na exposição que será feita a seguir, considere um problema de valor inicial,

$$y' = f(t, y), \text{ para } a \leq t \leq b, \; y(a) = \alpha \tag{11}$$

com f contínua e satisfazendo uma condição de Lipschitz na variável y.

Seja então um método numérico com a equação de diferenças dado a seguir

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{i+1} &= w_i + h\phi(t_i, w_i, h), \text{ para cada } i = 0, 1, \cdots, N-1, \end{aligned} \tag{12}$$

que aproxima a solução do problema de valor inicial dado na equação (11).

Iremos supor que existem constantes $K, h_0 > 0$ e que ϕ é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz na variável y no conjunto

$$D = \{(t, y, h) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty, 0 < h < h_0\},$$

assim $|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)| \leq K|y_1 - y_2|$ para todos $(t, y_1, h), (t, y_2, h) \in D$. Os métodos de Runge-Kutta satisfazem essas condições, em particular, ϕ irá satisfazer a condição de Lipschitz na variável y desde que f satisfaça a condição de Lipschitz na variável y.

Serão mostrados a seguir lemas necessários para provar alguns resultados importantes.

Lema 12. *Para todo $x \geq -1$ e para qualquer m positivo, temos que $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$.*

Prova. *Utilizando o Teorema de Taylor com $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$ e com $n = 1$ temos $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2 e^\xi}{2}$, em que ξ está entre 0 e x. Logo, $0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \dfrac{x^2 e^\xi}{2} = e^x$, e como $1 + x \geq 0$, segue-se que*

$$0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}.$$

Lema 13. *Se s e t forem números reais positivos, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ for uma sequência que satisfaz $a_0 \geq -t/s$ e*

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t, \text{ para cada } i = 0, 1, 2, \cdots, k-1, \tag{13}$$

então

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

Prova. *Dado um i fixo, a desigualdade (13) implica que*

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)\, a_i + t \leq (1+s)\left[(1+s)\, a_{i-1} + t\right] + t \\ &= (1+s)^2 a_{i-1} + \left[1 + (1+s)\right] t \leq (1+s)^3 a_{i-2} + \left[1 + (1+s) + (1+s)^2\right] t \leq \\ &\vdots \\ &\leq (1+s)^{i+1} a_0 + \left[1 + (1+s) + \cdots + (1+s)^i\right] t. \end{aligned}$$

Mas, $1 + (1+s) + \cdots + (1+s)^i = \sum_{j=0}^{i} (1+s)^j$ *é uma série geométrica de razão* $(1+s)$ *cuja soma é* $\dfrac{1-(1+s)^{i+1}}{1-(1+s)} = \dfrac{1}{s}\left[(1+s)^{i+1} - 1\right]$*. Disto segue-se que,* $a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1} a_0 + \dfrac{t}{s}\left[(1+s)^{i+1} - 1\right]$*, e usando o Lema 12 com* $x = s$*, temos*

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)^{i+1} a_0 + \frac{t}{s}\left[(1+s)^{i+1} - 1\right] \leq e^{(i+1)s} a_0 + \frac{t}{s}\left[e^{(i+1)s} - 1\right] \\ &= e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}. \end{aligned}$$

Definição 14. *Dizemos que um método da forma (12) é* ***convergente*** *se para todo problema dado pela equação (1) o erro global, dado por* $w_i - y(t_i)$*, satisfizer* $\lim_{h\to 0} \max_{1\leq i\leq N} \{|w_i - y(t_i)|\} = 0$*. Além disso, diremos que o método tem ordem de convergência* p *se existir* $p > 0$ *tal que* $\max_{1\leq i\leq N} \{w_i - y(t_i)\} = O(h^p)$.

É claro que para que um método numérico ser útil ele deve ser convergente. Observe também que uma vez que $y(t)$ não é conhecida nos pontos de malha, se torna demasiado complexo analisar a convergência do método através desta definição. Isso leva a seguinte definição.

Definição 15. *Dizemos que um método da forma (12) é* ***consistente*** *se para todo problema dado pela equação (1) tivermos* $\lim_{h\to 0} \max_{1\leq i\leq N} \{\tau_i(h)\} = 0$*. Além disso, diremos que o método é consistente ordem* p *se existir* $p > 0$ *tal que* $\max_{1\leq i\leq N} \{\tau_i(h)\} = O(h^p)$.

Teorema 16. *Se o método de passo único dado em (12) é consistente de ordem* p *e* ϕ *é lipschitziana em* y*, então o método também é convergente de ordem* p*.*

Prova. *Observe que*

$$\begin{aligned} |w_{i+1} - y(t_{i+1})| &= |w_i + h\phi(t_i, w_i, h) - y(t_i) - h\phi(t_i, y(t_i), h) - h\tau_{i+1}(h)| \\ &\leq |w_i - y(t_i)| + hK|w_i - y(t_i)| + h|\tau_{i+1}(h)| \\ &= (1+hK)|w_i - y(t_i)| + h|\tau_{i+1}(h)|. \end{aligned}$$

Como $|w_0 - y(t_0)| = 0$*, segue-se do Lema 13 que*

$$\begin{aligned} |w_{i+1} - y(t_{i+1})| &\leq e^{(i+1)hK}\left(|w_0 - y(t_0)| + h\frac{|\tau_{i+1}(h)|}{hK}\right) - h\frac{|\tau_{i+1}(h)|}{hK} \\ &\leq \frac{\left(e^{(b-a)K} - 1\right)}{K} |\tau_{i+1}(h)|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade junto as hipóteses asseguram a conclusão do teorema.

Observação 17. *Nas condições do Teorema 10, os métodos de Euler e de Runge-Kutta são consistentes de ordem* n*. Deste modo, pelo Teorema 16, são também convergentes de ordem* n*.*

Mesmo um método sendo convergente, devido aos erros de arredondamento e ao fato de que os métodos não usam resultados exatos em cada passo, é necessário garantir que ele é **estável**, isto é, se mudanças pequenas nos dados do problema levam a mudanças pequenas nas aproximações w_i do método.

Definição 18. *Dizemos que o método numérico dado em 12 é estável se existirem contantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$\max_{1\leq i\leq N}\left\{|w_{i+1}-v_{i+1}|\right\}\leq C_1|w_0-v_0|+C_2\max_{1\leq i\leq N}\left\{|\omega_i|\right\},$$

em que a sequência v_{i+1}, com $i=0,1,\cdots,N-1$, é calculada a partir de um dado inicial v_0 por algum problema perturbado, do tipo $v_{i+1}=v_i+h\phi(t_i,v_i,h)+h\omega_i$.

Teorema 19. *Se ϕ é lipschitziana em y, então o método é estável.*

Prova. *De fato, $|w_{i+1}-v_{i+1}|\leq|w_i-v_i|+hK|w_i-v_i|+h|\omega_i|=(1+hK)|w_i-v_i|+h|\omega_i|$. Pelo Lema 13,*

$$\begin{aligned}|w_{i+1}-v_{i+1}|&\leq e^{(i+1)hK}|w_0-v_0|+\frac{\left(e^{(i+1)hK}-1\right)}{K}|\omega_i|\\&\leq e^{(b-a)K}|w_0-v_0|+\frac{\left(e^{(b-a)K}-1\right)}{K}\max_{1\leq j\leq N}\left\{|\omega_j|\right\}.\end{aligned}$$

Daí basta tomar $C_1=e^{(b-a)K}$ e $C_2=\dfrac{\left(e^{(b-a)K}-1\right)}{K}$.

Conforme exposto anteriormente, isto significa que se f for lipschitziana em y, então os métodos de Euler e de Runge-Kutta são estáveis.

Note que o Teorema 16 faz forte uso do fato de ϕ ser lipschitziana. O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para assegurar que o método é convergente sem necessitar exigir que ϕ seja lipschitziana.

Teorema 20. *Se o método numérico unipasso dado em 12 for estável e consistente de ordem p, então também é convergente de ordem p.*

Prova. *Da forma como foi definido o erro de truncamento local, temos que $y(t_{i+1})=y(t_i)+h\phi(t_i,y_i,h)+h\tau_{i+1}(h)$. Esta igualdade pode ser vista como um problema perturbado com $v_{i+1}=y(t_{i+1})$ (neste caso $v_0=y(t_0)=w_0$) e $\omega_i=\tau_{i+1}(h)$. Pela hipótese de estabilidade temos que*

$$\max_{1\leq i\leq N}\left\{|w_i-y(t_i)|\right\}=\max_{1\leq i\leq N}\left\{|w_i-v_i|\right\}\leq C_2\max_{1\leq i\leq N}\left\{|\tau_{i+1}(h)|\right\}.$$

Esta desigualdade junto a hipótese de consistência garante a conclusão do teorema.

8. CONCLUSÃO

Por fim, os métodos numéricos apresentados neste trabalho permitem resolver numericamente problemas de valor inicial que de forma análitica não seriam viáveis. Em particular, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é muito utilizado devido sua alta ordem de convergência e ao fato de ser eficiente computacionalmente, fornecendo resultados bastante precisos. Os métodos aqui apresentados podem ainda ser estendidos para resolver sistemas de problemas de valor inicial de primeira ordem. E com esta extensão é possível resolver problemas de valor inicial de ordens superiores com mesma precisão e ordem de convergência apresentadas no presente trabalho.

9. AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CNPq e ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) por financiar este projeto. Ao Programa de Educação Tutorial de Matemática da UFOP (PETMAT-UFOP) que apoiou o desenvolvimento do presente artigo. Por fim, agradeço ao meu orientador Geraldo César Gonçalves Ferreira.

10. REFERÊNCIAS

BURDEN, R.; FAIRES, J.; BURDEN, A. **Análise numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 2002.

VIANA, M.; ESPINAR, J. **Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2021.