



EXPLORANDO TRÊS DEMONSTRAÇÕES DA RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

EXPLORING THREE PROOFS OF EULER'S RELATION FOR CONVEX POLYHEDRA

EXPLORANDO TRES PRUEBAS DE LA RELACIÓN DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Gabriel Gariglio Cezar

<gabriel.gariglio@aluno.ufop.edu.br>

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil



<<https://orcid.org/0000-0002-9865-7419>>

Sebastião Martins Xavier

<semarx@ufop.edu.br>

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil



<<https://orcid.org/0009-0004-2765-0764>>

Rodrigo Geradlido do Couto

<couto@ufop.edu.br>

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

O propósito deste trabalho é apresentar o Teorema de Euler para poliedros convexos. Para isso, foram realizadas pesquisas bibliográficas sobre o tema. Como resultado, serão apresentadas três demonstrações desse teorema, utilizando diferentes níveis de conhecimento matemático.

Palavras-chave: Poliedros. Euler. Geometria.

Abstract

The purpose of this work is to present Euler's Theorem for convex polyhedra. For this purpose, bibliographical research on the subject was carried out. As a result, three projections of this theorem will be presented, using different levels of mathematical knowledge.

Keywords: Polyhedra. Euler. Geometry.

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar el Teorema de Euler para poliedros convexos. Para tal fin se realizó una investigación bibliográfica sobre el tema. Como resultado, se presentarán tres proyecciones de este teorema, utilizando diferentes niveles de conocimiento matemático.

Palabras-Clave: Poliedros. Euler. Geometría.

1. INTRODUÇÃO

A relação de Euler para poliedros convexos, expressa pela fórmula $V - A + F = 2$, onde V representa o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro convexo, é um dos teoremas fundamentais da geometria. Descoberta pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1758, essa relação foi objeto de estudo de vários matemáticos ao longo da história, dentre eles Legendre e Cauchy.

Nesse artigo, iremos analisar três demonstrações dessa relação. Para tanto, utilizamos a metodologia da pesquisa bibliográfica e estruturamos o texto em dois blocos principais. No primeiro deles, apresentamos os conceitos necessários para o entendimento das demonstrações e no segundo, as demonstrações em si.

Por fim, observaremos que diferentes níveis de conhecimento matemático foram necessários para concluir cada uma das demonstrações abordadas.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

2.1. Definindo Poliedros e seus Elementos

Os poliedros são formas geométricas tridimensionais que consistem em faces planas, arestas retas e vértices. Cada face de um poliedro é um polígono, e as arestas são as linhas onde duas faces se encontram. Portanto, antes de definirmos mais precisamente os poliedros, faz-se necessário um estudo preliminar dos polígonos.

2.1.1. Polígonos

Definição 1. Um **polígono** é uma figura geométrica plana formada por uma sequência finita de segmentos de reta conectados para formar um caminho fechado sem autointerseção. Cada segmento de reta é chamado de lado e os pontos onde os segmentos se encontram são chamados de vértices.

Os polígonos podem ser classificados em convexos e não convexos. Uma definição precisa de poliedros convexos pode ser vista em Neto (2013, p.17).

Definição 2. Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. $A_1A_2\dots A_n$ é um **polígono convexo** se $A_{n+1} = A_1$ e a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, para $1 \leq i \leq n$.

Definição 3. Os polígonos que não são convexos são ditos **polígonos côncavos** ou não-convexos.

2.1.2. Poliedros

Definição 4. Como podemos ver em Lima (2006, p.232), um **poliedro** é uma figura geométrica tridimensional composta pela reunião de um número finito de polígonos chamados faces em que:

- Cada lado de um desses polígonos é também lado de apenas um outro polígono.
- A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum chamado de aresta, ou é um vértice, ou é vazia.
- Sempre é possível ir de um ponto de uma face a outro ponto qualquer do poliedro sem passar por nenhum vértice.

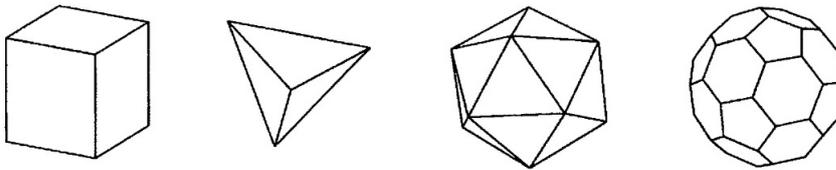
Os principais elementos dos poliedros são as faces, as arestas e os vértices.

Assim como os polígonos, os poliedros podem ser agrupados em convexos e não convexos.

Definição 5. Um **poliedro convexo** é aquela que possui a seguinte característica: se dados quaisquer dois pontos desse objeto sempre será possível traçar um segmento de reta completamente contido nele.

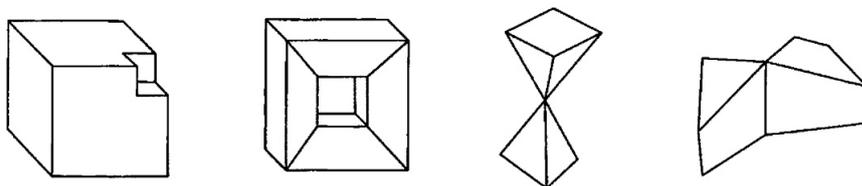
Definição 6. Os poliedros que não possuem a característica que define os poliedros convexos são definidos como **poliedros não convexos**.

A seguir, a Figura 1 apresenta alguns exemplos de poliedros convexos e a Figura 2 exemplos de poliedros não convexos.



Fonte: Richeson (2015)

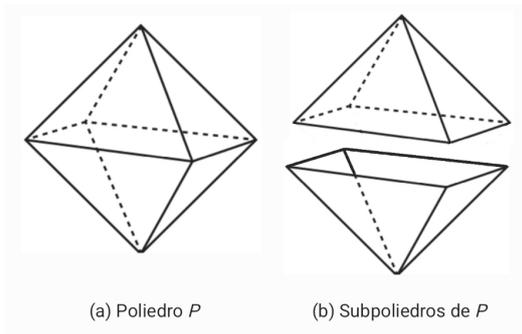
Figura 1. Exemplos de poliedros convexos



Fonte: Richeson (2015)

Figura 2. Exemplos de poliedros não convexos

Definição 7. Um **Subpoliedro** Q do poliedro P é o subconjunto de P formado pela reunião de algumas de suas faces, de tal modo que Q também seja um poliedro.



Fonte: Próprio Autor

Figura 3. Exemplos de subpoliedros

Definição 8. Poliedro conexo é o que não permite ser escrito como a reunião de dois de seus subpoliedros de modo que a interseção entre ambos seja vazia, salvo no caso trivial em que um dos subpoliedros é o conjunto vazio.

O poliedro apresentado na Figura 3 (a) é um exemplo de poliedro conexo.

Definição 9. Aresta livre de um poliedro é aquela que é lado de apenas uma face do poliedro. Analogamente, **vértice livre** é o vértice que pertence a somente uma face.

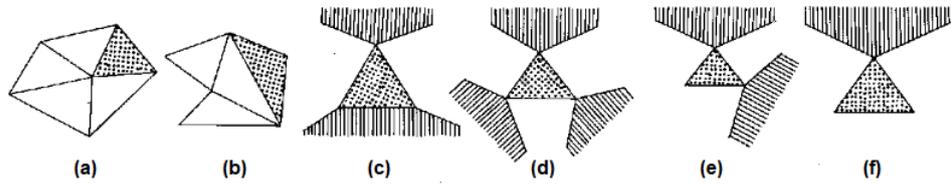
Segundo Lima (1991), há seis possibilidades de arestas livres ao considerar apenas faces triangulares (Figura 4):

- a. A face possui apenas uma aresta livre.
- b. A face tem duas arestas livres e apenas um vértice livre.
- c. A face possui duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre.
- d. A face possui as três arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre.
- e. A face tem três arestas livres e apenas um vértice livre.
- f. A face possui três arestas livres e dois vértices livres.

Definição 10. Ciclo num poliedro P é uma linha poligonal fechada, cujos lados são arestas de P .

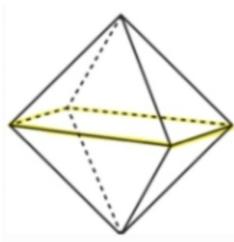
Definição 11. Bordo de um poliedro é a reunião de suas arestas livres. Assim, um ciclo $\lambda \subset P$ é um bordo se existir um subpoliedro $Q \subset P$ tal que λ é o conjunto das arestas livres de Q .

Definição 12. Duas faces de um poliedro são **faces encadeadas** quando existe uma sequência de faces entre elas tais que a interseção entre faces adjacentes é uma aresta comum a ambas as faces (Figura 7).



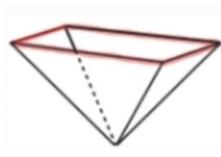
Fonte: Lima (1991)

Figura 4. Arestas livres para faces triangulares



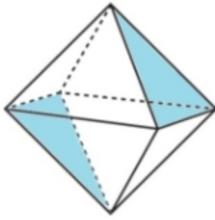
Fonte: Próprio Autor

Figura 5. Exemplo de ciclo



Fonte: Próprio Autor

Figura 6. Exemplo de bordo



Fonte: Próprio Autor

Figura 7. Exemplo de faces encadeadas

2.2. Geometria Esférica

As definições apresentadas anteriormente não são suficientes para embasar todas as provas que serão apresentadas nesse artigo. Para algumas delas, precisaremos de conceitos oriundos da geometria esférica, que é uma parte da geometria que trata das propriedades das figuras na superfície de uma esfera.

A prova matemática de que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é π radianos deve-se ao fato de considerarmos que, por um ponto não pertencente a uma reta, passa uma única reta paralela à primeira. Esse fato é um dos axiomas da geometria plana e é conhecido como o quinto postulado de Euclides.

Diferentemente da geometria plana, a geometria esférica refuta o quinto postulado de Euclides. Nas superfícies esféricas, as linhas geodésicas (14) sempre se cruzam em dois pontos. Esse fato, faz com que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico seja maior que π radianos, cuja prova veremos quando abordarmos o Teorema de Girard (Teorema 3).

Definição 13. Uma esfera E de centro em O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço que distam r do ponto O .

Definição 14. Círculo máximo, ou **geodésica**, é qualquer circunferência sobre a superfície de uma esfera E que possui raio igual ao da própria esfera.

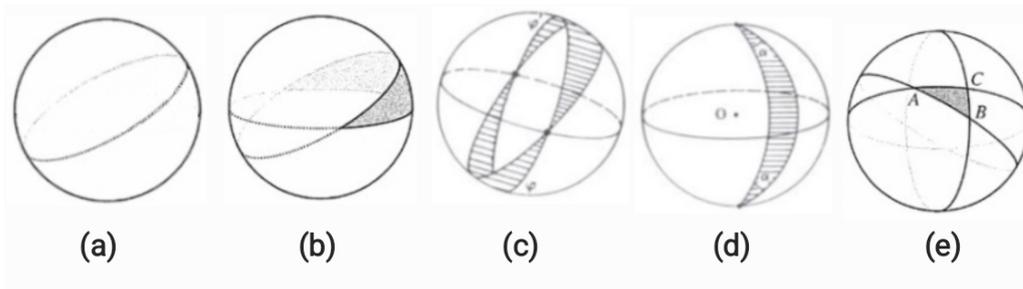
Definição 15. **Fuso** é uma região de uma semiesfera delimitado por dois círculos máximos (Definição 14) que se interceptam em dois pontos diametralmente opostos, chamados vértices.

Definição 16. **Fuso completo** é uma região da esfera delimitada por dois círculos máximos que se interceptam em dois pontos diametralmente opostos, chamados vértices. Ele é composto por dois fusos. Cada um dos pontos de um dos fusos é diametralmente oposto aos pontos do outro fuso em relação à origem.

Definição 17. O **ângulo do fuso** é o ângulo formado entre as tangentes das geodésicas em qualquer um de seus vértices.

Definição 18. **Triângulo esférico** ou **triângulo geodésico** é uma região formada por um fuso mais uma geodésica.

Uma vez apresentadas todas as definições necessárias, passemos agora para as demonstrações do Teorema de Euler para Poliedros Convexos



Fonte: Próprio Autor (a), Richeson (2015) (b) e (e), Lima (2010) (c) e (d)

Figura 8. Exemplo de (a) geodésica, (b) fuso, (c) fuso completo, (d) ângulo do fuso e (e) triângulo esférico

3. ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Ao longo do tempo, alguns matemáticos, como Legendre e Cauchy, se detiveram em provar a veracidade da Relação de Euler, uma vez que, segundo Richeson (2015, p.79), o próprio Euler não o fez a contento.

O Teorema de Euler foi descoberto em 1758. Desde então, diversas demonstrações aparecem na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy), que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de *poliedro*. Mesmo Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra. (Lima, 2006, p. 235)

O teorema é enunciado de forma simples da seguinte maneira:

Teorema 1. *Seja P um poliedro convexo (Definição 6) com V vertices, A arestas e F faces. Então vale a igualdade $V - A + F = 2$.*

Este enunciado reflete uma característica intrínseca dos poliedros convexos, independentemente de sua forma ou tamanho, e é um dos pilares da teoria dos poliedros, oferecendo uma ferramenta poderosa para entender suas estruturas.

Existem várias demonstrações desse Teorema de Euler. Recentemente, duas demonstrações do teorema foram publicadas na Revista do Professor de Matemática (RPM), RPM nº3 (Filho, 2010) e RPM nº5 (Lima, 2010), pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Neste texto, apresentaremos e discutiremos detalhadamente essas demonstrações, que foram cuidadosamente estudadas e analisadas. Também, apresentaremos uma demonstração baseada no estudo da demonstração de Cauchy feita pelo professor Elon (Lima, 1991).

3.1. Demonstração do Teorema de Euler Através da Soma dos Ângulos Internos dos Poliedros

A demonstração que apresentamos nessa seção para o Teorema 1 foi baseada no artigo publicado na RPM nº3 (Filho, 2010).

Definição 19. Uma **triangulação** de um polígono é a decomposição desse polígono em um conjunto de triângulos, de modo que:

- Os vértices dos triângulos coincidem com os vértices do polígono;
- Nenhum lado de um triângulo sai da região delimitada pelo polígono ou cruza outro lado do polígono.

Lema 1. Qualquer face não triangular de um poliedro convexo (Definição 6) pode ser transformada em duas ou mais faces triangulares sem alterar o número $V - A + F$.

Prova. Sejam V , A e F respectivamente os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. As faces poligonais de um poliedro podem ser decompostas em faces triangulares por meio de diagonais ao ligar um determinado vértice aos demais desde que não sejam adjacentes ao primeiro. Para cada diagonal numa face, o número V não se altera, enquanto cada um dos números A e F aumentam uma unidade. Esses aumentos se cancelam na expressão $V - A + F$. Portanto, qualquer face não triangular de um poliedro pode ser transformada em duas ou mais faces triangulares sem alterar o número $V - A + F$. \square

Passamos agora à prova do Teorema 1.

Prova. Sejam r uma reta não paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P , e H um plano que não intersecta P e é perpendicular a r . Isso sempre será possível, pois, no poliedro convexo, o número de faces é finito. Sem perda de generalidade, suponha que H esteja sob o poliedro de modo que o semi-espaco superior delimitado por H contenha o poliedro P , (exemplo: Figura 9).

Considerando o conjunto de todas as retas verticais paralelas a r que passam pelo poliedro P , tem-se que cada ponto $p \in P$ corresponde a um único ponto $p' \in H$ (exemplo: Figura 10).

A união de todos esses pontos p' formam um conjunto convexo $P' \subset H$, cujo contorno λ' é a sombra de uma poligonal fechada λ , formada por arestas de P (exemplo: Figura 11).

Essa poligonal λ chama-se contorno aparente do poliedro P e cada ponto de $\lambda' \subset H$ corresponde a um único ponto $p \in \lambda \subset P$. Dados dois pontos de P que têm relação com o mesmo ponto p' , chamamos de λ_1 o conjunto dos pontos de P mais distante de H e de λ_2 o dos pontos de P mais próximos de H , desde que nenhum desses pontos pertençam a λ . Assim, o bordo do poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: λ , λ_1 e λ_2 . Dessa forma haverá duas funções bijetivas:

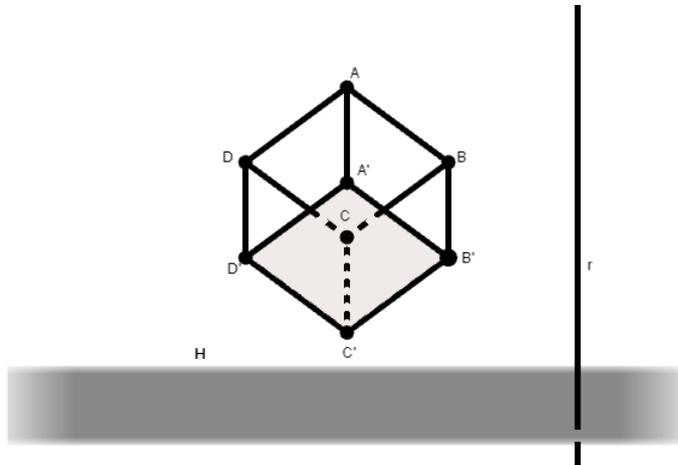
$$f_1 : \lambda \cup \lambda_1 \rightarrow H$$

$$p \mapsto p'$$

e

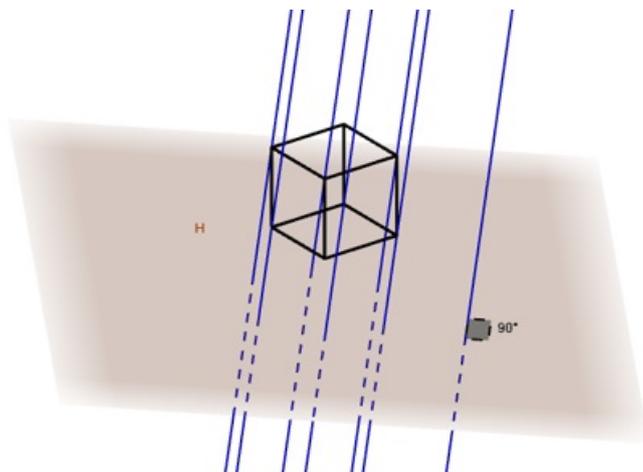
$$f_2 : \lambda \cup \lambda_2 \rightarrow H$$

$$p \mapsto p'$$



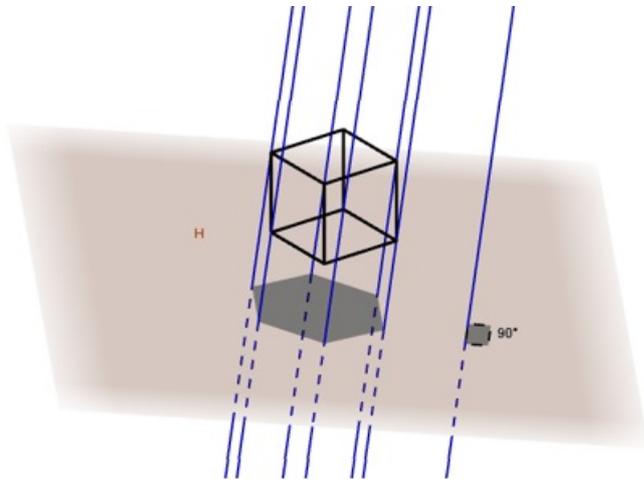
Fonte: Próprio Autor

Figura 9. Cubo suspenso (exemplo de poliedro convexo)



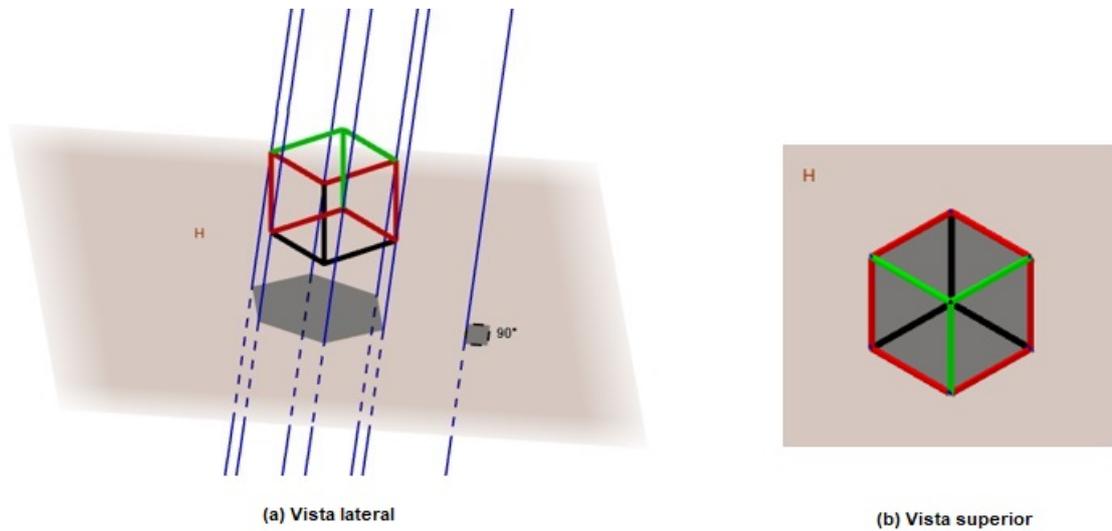
Fonte: Próprio Autor

Figura 10. Retas paralelas a r que passam pelo poliedro P



Fonte: Próprio Autor

Figura 11. Projeção do cubo no plano H (sombra λ)

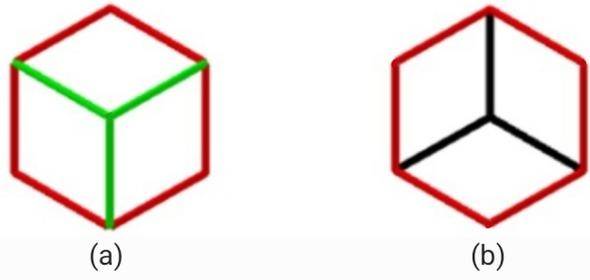


Fonte: Próprio Autor

Figura 12. Pontos iluminados (verde), pontos sombrios (negrito) e contorno aparente (vermelho)

Ao conjunto imagem de $f_1 \subset H$ denomina-se pontos iluminados, e ao imagem de $f_2 \subset H$, pontos sombrios (exemplo: Figura 12).

Assim, o poliedro P será decomposto em dois conjuntos, um formado pelos pontos iluminados (exemplo: Figura 13 (a)) e um outro formado pelos pontos sombrios (exemplo: Figura 13 (b)).



Fonte: Próprio Autor

Figura 13. Poliedros formados pelos (a) pontos iluminados e (b) pelos pontos sombrios

Pelo Lema 1, pode-se considerar que todas as faces de P tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces. Portanto,

$$3F = 2A \Rightarrow F = 2A - 2F \quad (1)$$

Calculando de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P , temos:

- a. Como há F triângulos em P e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a π radianos, então

$$S = \pi \cdot F \quad (2)$$

Substituindo 1 em 2, tem-se que

$$S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F = 2\pi(A - F) \quad (3)$$

- b. Sejam S_1 e S_2 a soma dos ângulos internos dos triângulos contidos na projeção de P em H por f_1 e por f_2 , respectivamente. Isto é, a soma dos ângulos dos polígonos P'_1 e P'_2 contidos em H . Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo plano é sempre igual a π radianos, então $S = S_1 + S_2$, ou seja, a soma dos ângulos do poliedro P é igual a soma ângulos dos polígonos P'_1 e P'_2 . Tanto S_1 quanto S_2 podem ser calculados pela soma dos ângulos nos vértices internos de cada um desses polígonos mais a soma dos ângulos com vértices no contorno aparente.

Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente. Assim, o número total de vértices do poliedro P é igual a soma dos vértices do contorno aparente, dos iluminados e dos sombrios, ou seja, .

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \quad (4)$$

Considerando o polígono P'_1 , tem-se que a soma dos ângulos nos vértices iluminados é igual a 4 ângulos retos, isto é, 2π radianos, e a soma dos ângulos nos vértices do contorno é igual a $\pi(V_0 - 2)$. Assim,

$$S_1 = 2\pi \cdot V_1 + \pi(V_0 - 2) \quad (5)$$

e

$$S_2 = 2\pi \cdot V_2 + \pi(V_0 - 2) \quad (6)$$

Adicionando (5) e (6),

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi \quad (7)$$

Substituindo (4) em (7),

$$S = 2\pi V - 4\pi = 2\pi(V - 2) \quad (8)$$

Comparando (3) com (8) e dividindo ambos os termos por 2π , tem-se que:

$$A - F = V - 2 \Rightarrow V - A + F = 2.$$

□

3.2. Demonstração do Teorema de Euler Através da Soma das Áreas de Triângulos Esféricos

Segundo Lima (2010), a demonstração da Relação de Euler apresentada por Legendre possui a mesma ideia central do argumento exposto pelo autor do artigo publicado na RPM nº3 (Filho, 2010), ou seja, a soma dos ângulos dos triângulos formados pela decomposição das faces poligonais do poliedro. A diferença entre as duas demonstrações está no fato de Legendre utilizar a soma dos ângulos internos de triângulos esféricos (Teorema de Girard) em sua demonstração.

3.2.1. Teorema de Girard

Conforme aponta (Lima, 2010), o matemático francês Albert Girard (1595 – 1632) demonstrou que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a π radianos. Esse importante teorema ficou conhecido como Teorema de Girard e será apresentado a seguir (Teorema 3). Antes, porém, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2. *Seja α o ângulo em radianos de um fuso (Definição 17) contido em uma esfera de raio r , então a área desse fuso é $2\alpha r^2$.*

Prova. *De fato, Como a área de um fuso tem proporção direta com seu ângulo e sendo $S = \pi r^2$ a área da superfície de uma esfera de raio r tem-se que a área de um fuso com ângulo α radianos é $2\alpha r^2$.* □

Teorema 2. *Seja Φ um fuso completo (definição 16) contido em uma esfera E de raio r , cujo ângulo α é medido em radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera, a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R , R' do fuso completo contidas em cada um desses hemisférios têm áreas iguais a $2\alpha r^2$.*

Prova. Sejam S^2 a superfície de uma esfera E e $f : S^2 \rightarrow S^2$ a função que relaciona cada ponto $x \in S^2$ à sua antípoda $f(x) = x'$. Essa função possui as propriedades a seguir:

- a. Se $x \in H$, então seu antípoda $x' = f(x) \in H'$.
- b. Se $x \in \Phi$, então seu antípoda $x' = f(x) \in \Phi$ também.
- c. A área de R é igual à área de $R' = f(R)$, para $\forall R \subset E$.

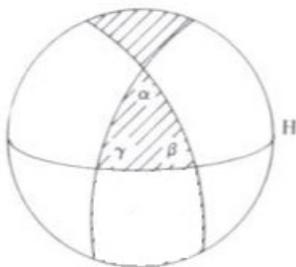
Assim, se R for a parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H , tem-se que $R' = f(R)$ é a parte de $\Phi \subset H'$. Portanto, área de Φ é igual à área de R mais a área de R' , que, pela terceira propriedade acima, é igual ao dobro da área de R . Logo,

$$R = 2\alpha r^2$$

□

Teorema 3. Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo esférico. Se esses ângulos forem medidos em radianos, então $S_t = \alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, com a sendo a área desse triângulo.

Prova. Seja H um hemisfério que contenha o triângulo esférico dado. Seja também R_α a região formada pelo prolongamento dos lados que formam o ângulo α , nos dois sentidos, até encontrarem o bordo do hemisfério H (Figura 14).



Fonte: Lima (2010)

Figura 14. Exemplo da região R_α (parte hachurada)

Similarmente a R_α , sejam R_β e R_γ as regiões formadas pelos prolongamentos dos lados que formam os ângulos β e γ .

De acordo com o Teorema 2, a área das regiões $R_\alpha \subset H$, $R_\beta \subset H$ e $R_\gamma \subset H$ são iguais a $2\alpha r^2$, $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente.

Sendo assim, tem-se que a soma das áreas R_α , R_β e R_γ é igual a área de H mais duas vezes a área a do triângulo, que foi contada três vezes. Portanto,

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a$$

Logo, simplificando ambos os termos por $2r^2$, tem-se

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}.$$

□

Agora apresentaremos a demonstração do Teorema de Euler (Teorema 1) à luz da geometria esférica.

Prova. Seja Ω uma esfera de raio r cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro convexo P . A projeção radial do poliedro P sobre a esfera Ω produz uma decomposição de P em triângulos esféricos t dispostos de modo semelhante às faces de P , ou seja, Ω fica recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices. Para cada um desses triângulos t , vale a fórmula de Girard (Teorema 3)

$$S_t = \pi + \frac{a_t}{r^2}, \quad (9)$$

onde S_t é a soma dos ângulos internos de t e a_t é a área do triângulo t . Considerando todos os F triângulos, tem-se que

$$\sum S_t = \pi \cdot F + \frac{\sum a_t}{r^2} \quad (10)$$

Como a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a 2π ,

$$\sum S_t = 2\pi \cdot V. \quad (11)$$

Além disso, a soma das áreas de todos os triângulos t é a área total de Ω , ou seja,

$$\sum a_t = 4\pi r^2. \quad (12)$$

Como, nesse caso, a soma das áreas dos triângulos esféricos coincide com a área total da esfera, então de (10), (11) e (12),

$$2\pi \cdot V = \pi \cdot F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow 2V - F = 4. \quad (13)$$

Como todo triângulo t tem 3 lados e toda aresta é lado de 2 triângulos, tem-se

$$F = 2A - 2F. \quad (14)$$

Substituindo (14) em (13) e dividindo ambos os membros da equação por 2, conclui-se que $V - A + F = 2$. □

3.3. Demonstração do Teorema de Euler Segundo Cauchy

A demonstração do teorema de Euler a seguir é devida ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857). Segundo Lima (1991), Cauchy pretendeu provar que a relação $V - A + F = 2$ era válida para todo poliedro convexo, mas não definiu precisamente o conceito de poliedro utilizado nem explicitou todas as hipóteses necessárias para que tal demonstração fosse válida. Entretanto, anos após da publicação do seu trabalho, descobriu-se que as condições necessárias para que um poliedro se adequasse aos argumentos propostos pelo matemático

francês constituem em uma caracterização topológica da esfera em termos combinatórios, ou seja, um poliedro satisfaz tais condições se, e somente se, for homeomorfo a uma esfera. Apesar dessa última equivalência ser verdadeira, ela é um resultado profundo de Topologia e é equivalente a de demonstrar a invariância dos grupos de homologia da esfera S^2 . Entretanto, a demonstração de Cauchy precisa preliminarmente dos seguintes lemas.

Lema 3. *Seja P um poliedro (Definição 4) cujas arestas sejam também, cada uma, um lado de exatamente duas faces de P . Todo subpoliedro próprio de P (Definição 7) tem arestas livres (Definição 9) se, e somente se, duas faces quaisquer de P são encadeadas (Definição 12).*

Prova. *Considera-se P um poliedro cujos subpoliedros próprios possuem arestas livres. Para uma dada face T , seja Q uma reunião das faces S de P que podem ser encadeadas com T . Suponha que $Q \neq P$. Como, por hipótese, todo subpoliedro próprio de P possui aresta livre, tem-se que Q possui uma aresta livre α , ou seja, existe uma face $S \subset Q$ tal que $\alpha \subset S$. Também, como $S \subset Q$, então S é encadeável com T por definição. Por hipótese, como toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P , então existe uma face $S' \subset P$ tal que $\alpha \subset S'$. Mas como α é livre em Q , a face S' não estaria em Q , o que é absurdo, pois S' é encadeável com T . Logo, $Q = P$, ou seja, duas faces quaisquer de P são encadeadas. Reciprocamente, suponha-se P um poliedro em que duas faces quaisquer são encadeadas. Para mostrar que todo subpoliedro próprio $Q \subset P$ tem alguma aresta livre, toma-se uma face S em $P - Q$ e uma face T em Q . Como por hipótese duas faces quaisquer de P são encadeadas, existe uma cadeia T_1, T_2, \dots, T_n em P , com $T_1 = T$ e $T_n = S$. Seja T_i a última face desta cadeia que pertence a Q . Então $i < n$ e a aresta $\alpha = T_i \cap T_{i+1}$ é livre em Q pois se α fosse lado de outra face em Q além de T_i , essa face teria de ser T_{i+1} , que é um absurdo, pois T_{i+1} não está contida em Q . \square*

A equivalência contida no Lema 3 será utilizada na primeira passagem do argumento de Cauchy, que é a retirada de uma das faces do poliedro. Essa retirada implicará no surgimento de arestas livres no subpoliedro resultante.

Lema 4. *Seja P um poliedro onde cada aresta seja também lado de exatamente duas faces de P e que todo ciclo em P (Definição 10) seja um bordo (Definição 11). Se P' se obtém de P por omissão de uma face T então todo ciclo em P' é um bordo. \square*

Prova. *Dado um ciclo λ em P' , seja Q um subpoliedro de P cujo bordo é λ . Como, por hipótese, toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P então $Q' = P - Q$ é outro subpoliedro de P cujo bordo ainda é λ , sendo $Q \cap Q' = \lambda$ e $Q \cup Q' = P$. Assim apenas um dos dois subpoliedros, Q ou Q' , contém T . Sem perda de generalidade, suponha-se $T \subset Q$. Então Q' é um subpoliedro de P' cujo bordo é λ , ou seja, todo ciclo em P' é um bordo.*

O Lema 4 garante que, após a retirada de uma das faces de P no primeiro argumento de Cauchy, todo o ciclo do subpoliedro P' de P também é um bordo. Esse fato será importante posteriormente para demonstrar que o subpoliedro P' é conexo.

Entretanto, caso seja a retirada de uma face de P' , ou seja, de um dos 6 casos de poliedros com arestas livres representados na Figura 4, os Lemas a seguir demonstraram que todos os ciclos dos subpoliedros P'' de P' serão também bordos.

Lema 5. *Seja P' um subpoliedro de P em que todo ciclo de P' é um bordo. Se P'' é um subpoliedro de P' tal que $P'' = P' - T$, onde T é uma face de P' com apenas uma aresta livre (Figura 4 (a)) ou T é uma face com duas arestas livres e apenas um vértice livre (Figura 4 (b)), então todo ciclo em P'' é um bordo.*

Prova. Dado um ciclo $\lambda \subset P''$, seja Q um subpoliedro de P' cujo bordo é λ . Supondo $T \subset Q$, então λ conteria as arestas livres de T , que é um absurdo, pois $\lambda \subset P' - T$. Logo $Q \subset P''$, ou seja, todo ciclo em P'' é um bordo. \square

O Lema 5 permitirá que, posteriormente, seja demonstrado que os subpoliedros P'' provenientes da retirada de uma face de P' que tenha apenas uma aresta livre, ou de uma que tenha duas arestas livres e apenas um vértice livre, sejam conexos.

Lema 6. Seja P' um subpoliedro de P em que todo ciclo de P' é um bordo. Se P'' é um subpoliedro de P' tal que $P'' = P' - T$, onde T é uma face de P' . Como T tanto pode conter duas arestas livres mas sem vértice livre (Figura 4 (c)) quanto pode conter três arestas livres com mais de um vértice livre (Figura 4 (d) e (e)), então todo ciclo de cada componente conexa de P'' é um bordo.

Prova. Dado um ciclo λ numa componente conexa $C \subset P''$, então existe um subpoliedro $Q \subset P'$ cujo bordo é λ . Supondo que Q contenha faces de mais de uma componente de P'' , então $T \subset Q$. Isso implica em Q conter também as faces livres de T , que é um absurdo, pois $\lambda \subset Q$. Portanto $Q \subset C$, ou seja, todo ciclo em cada componente convexa de P'' é um bordo. \square

Semelhantemente ao Lema 5, o Lema 6 servirá para provar que os subpoliedros P'' serão conexos para os demais casos de subpoliedro com arestas livres não tratados, exceto para o caso em que a face a ser retirada possui três arestas livres e apenas um vértice livre, que, obviamente, produzirá um subpoliedro cujo todos os ciclos são bordos.

Teorema 4. Seja P um poliedro no qual:

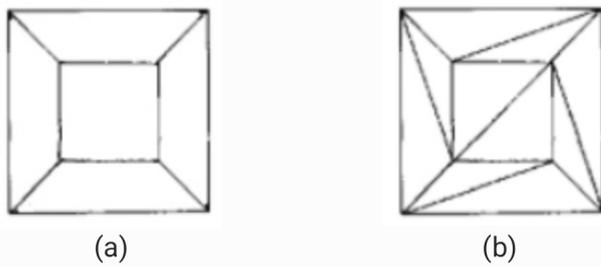
- a. Toda aresta está contida exatamente em duas faces;
- b. Duas faces quaisquer são encadeadas;
- c. Todo ciclo é um bordo.

Então P cumpre a relação de Euler $V - A + F = 2$.

Prova. Primeiramente, retira-se uma face do poliedro P . Os números V e A não se alteram, mas F diminui de uma unidade, pois, por hipótese, toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P o que implica que o poliedro P possui pelo menos uma face sem arestas livres. Assim, a demonstração se resume a provar que o poliedro modificado cumpre a condição $V - A + F = 1$ para cada uma de suas componentes conexas.

A retirada de uma face produz um poliedro modificado de P cujas arestas que são provenientes dessa face retirada são arestas livres, pois o Lema 3 garante a equivalência dessa afirmação com a hipótese de que duas faces quaisquer de P são encadeadas. Considerando que o poliedro seja maleável, pode-se assim esticá-lo a partir das arestas livres de modo a transformá-lo em uma figura plana. A Figura 15 (a) ilustra a transformação ocorrida em um cubo após a retirada de uma de suas faces quadrada e de sua planificação.

A próxima etapa é traçar diagonais que não se cortam de modo a decompor cada face em triângulos. Para cada diagonal traçada, o número V de vértice não muda, mas o número A de arestas e F de faces aumentam de uma unidade. Logo, $V - A + F$ não se altera. Pode-se assim supor que todas as faces do poliedro são triângulos. A Figura 15 (b) mostra como ficaria um cubo após esse processo.



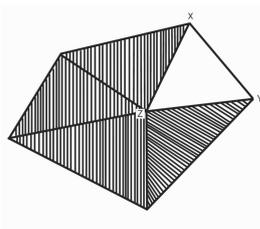
Fonte: Próprio Autor (a), Lima (1991) (b)

Figura 15. Exemplo de (a) cubo achatado e (b) cubo diagonalizado

Após traçar as diagonais, retira-se recursivamente cada uma das faces triângulares que possua alguma aresta livre, uma de cada vez. Para tanto, precisa-se garantir que o poliedro seja conexo (Definição 8) e que essa característica se mantenha, para que o processo de retirada seja mantido. Isso faz com que o número $V - A + F$ não se altere até que reste apenas uma face triangular para cada componente conexa em que obviamente $V - A + F = 1$.

Há seis possíveis casos para faces de poliedros com arestas livres (Figura 4). Considerando a retirada de uma das faces do poliedro modificado para cada um dos casos temos que:

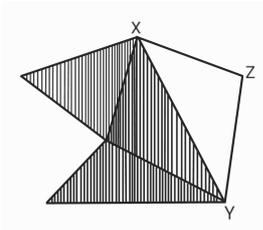
- a. Se o triângulo retirado possuir apenas uma aresta livre (Figura 16), sua retirada não muda V , mas faz com que A e F sejam ambos diminuídos de uma unidade. Portanto, o número $V - A + F$ não se altere. Além disso, o subpoliedro resultante é obviamente conexo. Sendo assim, o processo de retirada das faces pode continuar normalmente.



Fonte: Próprio Autor

Figura 16. Exemplo de face com apenas uma aresta livre (veja Figura 4 (a))

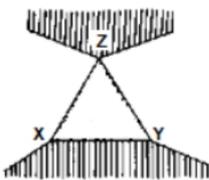
- b. Se o triângulo retirado tiver duas arestas livres e apenas um vértice livre (Figura 17), o número de V e de F serão ambos subtraídos de uma unidade e o de A de duas unidades, o que mantém o valor de $V - A + F$ constante. Com efeito, similarmente ao caso anterior, o subpoliedro resultante também é conexo, o que garante a continuidade do processo de retirada das faces normalmente.



Fonte: Próprio Autor

Figura 17. Exemplo de face com duas arestas livres e apenas um vértice livre (veja Figura 4 (b))

- c. Se for retirado o triângulo que tem duas arestas livres e nenhum dos seus vértices livre (Figura 18), o número V ficará constante, o número de A diminui duas unidades e o de F diminui uma unidade, o que faz $V - A + F$ aumentar de uma unidade, mas, em compensação, faz com que o número de componentes conexas também aumente de uma unidade e, assim, o processo de retirada das faces pode prosseguir normalmente. Com efeito, seja XYZ o triângulo a ser retirado cujos lados XZ e YZ são livres mas o vértice Z e o lado XY não são livres (Figura 18).

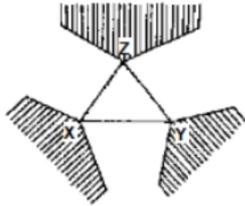


Fonte: Próprio Autor

Figura 18. Exemplo de face com duas arestas livres e nenhum vértice livre (veja Figura 4 (c))

A retirada desse triângulo originará dois subpoliedros distintos, um com o vértice X e outro com o vértice Z . Supondo por absurdo que, retirado o triângulo XYZ , houvesse ainda uma poligonal λ da qual os lados XZ e YZ não fazem parte e cujos extremos fossem X e Z . Caso o poliedro P' em questão seja aquele obtido da retirada da face antes da planificação do subpoliedro resultante, do Lema 4 tem-se que todo ciclo em P' é um bordo, mas caso seja alguma iteração subsequente, o Lema 5, ou o Lema 6, garante que todo ciclo do poliedro P'' em questão também seja um bordo, pois tem-se por hipótese também que toda aresta de P é lado de exatamente duas faces de P . Assim, independentemente de qual iteração se esteja, $\lambda \cup XZ$ é um bordo de algum subpoliedro do poliedro em questão. Em particular, XZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é uma absurdo. Logo, a retirada do triângulo XYZ originará dois subpoliedros conexos e distintos e o processo de retirada das faces pode prosseguir em cada uma das componentes conexas.

- d. Se o triângulo a ser retirado tiver as três arestas livres mas nenhum dos vértices livres (Figura 19), o número de V fica constante, mas diminui o número de A em três unidades e o de F em uma unidade, fazendo com que $V - A + F$ aumente de duas unidades e, em compensação, o número de componentes conexas também aumenta de duas unidades. Seja XYZ o triângulo a ser retirado cujos lados XZ , YZ e XY são livres mas os vértices X , Y e Z não são livres (Figura 19).



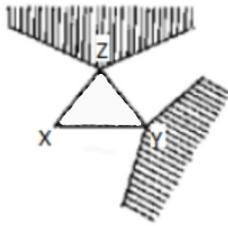
Fonte: Próprio Autor

Figura 19. Exemplo de face com três arestas livres e nenhum vértice livre (veja Figura 4 (d))

A retirada desse triângulo originará a três subpoliedros distintos, um com o vértice X , outro com o vértice Y e mais outro com o vértice Z . Por absurdo, suponha-se que após a retirada do triângulo XYZ houvesse uma poligonal λ da qual os lados XZ e YZ não fazem parte e cujos extremos fossem X e Z . Assim, como anteriormente, o Lema 4 garante que todo ciclo em P' é um bordo, caso o poliedro em questão seja o primeiro subpoliedro obtido, e o Lema 5, ou o Lema 6, garante que todo ciclo do poliedro P'' em questão é um bordo, em se tratando dos demais subpoliedros. Assim, $\lambda \cup XZ$ será um bordo independente de qual iteração esteja sendo considerada. Em particular, XZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é um absurdo. De maneira análoga, supondo por absurdo que após a retirada do triângulo XYZ houvesse uma poligonal λ da qual os lados YX e YZ não fazem parte e que X e Y sejam extremos. Novamente, o Lema 5 ou o Lema 6 garante outra vez que todo ciclo do poliedro em questão é um bordo, isto é, que $\lambda \cup YZ$ é um bordo de algum subpoliedro do poliedro em questão. Assim, YZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é um absurdo. Logo, a retirada do triângulo XYZ originará três subpoliedros conexos e distintos. Além disso, a continuidade do processo de retirada das faces em cada uma das componentes conexas fica preservada.

- e. Se o triângulo retirado possuir três arestas livres e apenas um vértice livre (Figura 20), o número V diminui de uma unidades, o de A de três unidades e o de F de uma unidade, o que faz $V - A + F$ aumentar de uma unidade, que será compensada pelo número de componentes conexas, que aumenta de uma unidade. Seja XYZ o triângulo a ser retirado cujos lados XY , XZ e YZ são livres e os vértices Y e Z não os são (Figura 20).

A retirada desse triângulo originará a dois subpoliedros distintos, um com o vértice Y e outro com o vértice Z . Supondo por absurdo que, retirado o triângulo XYZ , houvesse ainda uma poligonal λ da qual os lados XZ e YZ não fazem parte e cujos extremos fossem Y e Z . O Lema 4, o Lema 5 ou o Lema 6 garante que, independentemente de



Fonte: Próprio Autor

Figura 20. Exemplo de face com três arestas livres e apenas um vértice livre (veja Figura 4 (e))

qual subpoliedro esteja sendo considerado, todo ciclo é um bordo, ou seja, $\lambda \cup YZ$ é um bordo de algum subpoliedro do poliedro em questão. Em particular, YZ seria lado de outro triângulo além de XYZ , que é um absurdo. Logo, a retirada do triângulo XYZ originará dois subpoliedros conexos e distintos. Também, o processo de retirada das faces em cada uma das componentes conexas pode prosseguir.

- f. Se o triângulo retirado tiver dois vértices e duas arestas livres (Figura 21), o número de V diminui de duas unidades, o de arestas de três unidades e o de F de uma unidade, então $V - A + F$ não se altera assim como a quantidade de componentes conexas (Figura 21).



Fonte: Próprio Autor

Figura 21. Exemplo de face com duas arestas livres e dois vértices livres (veja Figura 4 (f))

Logo, ao retirar-se todas as faces que têm alguma aresta livre, uma a uma, chega-se à última, que é um triângulo, em que $V - A + F = 1$. □

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como vimos, embora a relação de Euler $V - A + F = 2$ apresente-se de forma simples, sua demonstração pode exigir técnicas matemáticas relativamente sofisticadas. Entre as três abordagens apresentadas, a proposta pelo professor Zoroastro Azambuja (Sessão 3.1) talvez seja

a mais elementar, pois recorre a conceitos acessíveis a estudantes de nível médio, principalmente nas manipulações algébricas. Ainda assim, essa abordagem incorpora, de maneira sutil, ideias da matemática projetiva em seu argumento inicial. Já a demonstração de Legendre (Sessão 3.2) baseia-se em princípios da geometria esférica, o que pode representar um obstáculo para alunos que ainda não tenham formação matemática de nível superior. Por fim, a demonstração de Cauchy (Sessão 3.3), enriquecida pelas considerações do professor Elon Lima, faz uso de conceitos que podem, inclusive, servir como introdução ao estudo da topologia.

5. REFERÊNCIAS

FILHO, Z. A. Teorema de euler. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2010.

LIMA, E. e. o. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. 6^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro - Brasil: GRAFTEX Comunicação Visual, 1991.

LIMA, E. L. Ainda sobre o teorema de euler para poliedro convexos. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2010.

NETO, A. C. M. N. **Geometria**. 1^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2013.

RICHESON, D. S. **A Pérola de Euler: a fórmula dos poliedros e o nascimento da topologia**. Tradução de Carlos Florentino. 1^a. ed. Lisboa: Gadiva Publicações S.A., 2015.