O que é uma lógica?

What is a logic?

Newton C. A. da Costa
Décio Krause
Universidade Federal de Santa Catarina[1]

Resumo

Neste artigo pretendemos oferecer uma noção minimamente rigorosa do que seja uma lógica. A ideia central é que uma lógica, estritamente falando é um sistema lógico. Entenderemos um sistema lógico como formado, grosso modo, por um conjunto de fórmulas e um conjunto de regras de inferência. A partir daí veremos duas noções fundamentais: dedutibilidade e consequência lógica.

Palavras-chave

Lógica. Sistema lógico. Dedutibilidade. Consequência lógica.

1 *- Grupo de Estudos em Lógica e Fundamentos da Ciência. Departamento de Filosofia Universidade Federal de Santa Catarina (Julho 2013).*

Abstract

Our aim in this paper is to provide a minimal rigorous understanding of a logic. The main idea is that a logic is, strickly speaking, a system of logic. Roughly, a system of logic will be taken as a set of formulas and a set of rules of inference. Then, we will look at two fundamental notions: deductibility and logical consequence.

Keywords

Logic. System of logic. Deductibility. Logical consequence.

Lógica (disciplina) e "lógica" (sistema lógico)

A palavra "lógica" tem diversos significados. Comumente, ouve-se falar da `lógica do mercado', ou da `lógica da criança' (em distinção à `lógica do adulto'), etc. Todas essas denominações são imprecisas e necessitam ser vistas com cautela. Mas *Lógica* é também uma disciplina que é parte tanto da filosofia quanto da matemática, e tem se infiltrado em praticamente todas as áreas da investigação humana. Neste artigo, não falaremos da história da lógica, nem de suas aplicações, que hoje em dia vão da ciência da computação à medicina, passando pela matemática, pelas ciências empíricas (física, biologia), pela filosofia, pela economia, filosofia do direito e da psicanálise. Ficaremos restritos a desvendar o que se entende por *lógica* não como disciplina, mas como sinônimo de *sistema lógico*. Porém, algumas palavras devem ser ditas sobre esta distinção. Vários textos que se encontram na praça (livros introdutórios, principalmente) classificam a disciplina Lógica como o estudo de inferências válidas, e que seus "princípios fundamentais" seriam os princípios da identidade, da contradição e do terceiro excluído. (Quadro 1) Nada mais falso e desprovido de sentido do que isto. Basta que o leitor consulte o item 03 da *Mathematics Subject Classification*, editada pela *American Mathematical Society* em parceria com sua co-irmã alemã *Zentralbat für Mathematik*, (Quadro 2) (para constatar que a Lógica vai muito além disso, envolvendo a teoria da recursão, a teoria dos modelos, os fundamentos da teoria de conjuntos, dentre outras variadas áreas, que nem de perto se assemelham a estudo de raciocínios (aliás, o que seria um "raciocínio", precisamente?). Aquela parte da lógica que poderíamos chamar de teoria da argumentação, com certa condescendência, talvez pudesse se aproximar do que apregoam esses autores. Ademais, os três mencionados princípios não são os únicos que vigoram na lógica *clássica,* havendo muitos outros (dupla negação, lei de Peirce, lei de Scotus, etc); por fim, basta notar que não se pode fundar a parte mais básica da lógica (dita) clássica nesses três princípios. Eles não bastam para axiomatizar o cálculo proposicional clássico, por exemplo. E depois, porque identificar "lógica" com lógica clássica? Na lógica intuicionista de Brouwer e Heyting, o terceiro excluído não vale; nas lógicas paraconsistentes, o princípio da contradição não vale em geral, e nas lógicas não-reflexivas o princípio da identidade é que é restringido. (Quadro 3) Assim, como sustentar a afirmação acima? Afirmá-la constitui pura e simplesmente um erro conceitual. Mais à frente, alguns dos termos deste parágrafo ficarão mais claros.

Lógica não é apenas linguagem

Outro vício que encontramos nos livros e textos é a afirmativa de que lógica (no sentido de sistema lógico) identifica-se com linguagem. Talvez isso se deva a uma tradição, que remonta a Frege e Russell, de apresentar uma lógica (no caso deles, a que chamamos de `clássica') iniciando pela descrição de uma linguagem (símbolos primitivos, regras gramaticais de formação das expressões bem formadas, e depois o seu aparato dedutivo, composto por axiomas e regras de inferência). Mas este é apenas um dos lados da história. Com efeito, como mostraram os poloneses no início do século XX, uma lógica pode ser identificada com uma álgebra, e uma linguagem formal também é um tipo de álgebra ---trata-se de uma álgebra livre com um determinado conjunto de geradores, esses conceitos devendo ser entendidos no sentido que se lhes dá em álgebra.

Lógica como uma álgebra

Do ponto de vista algébrico, podemos ver uma lógica como um par ordenado $L = \langle F,T \rangle$, onde F é um conjunto não vazio (a natureza dos elementos não importa em uma primeira instância) e T é uma coleção de subconjuntos de F. Os elementos de F são denominados de *fórmulas*, e os de T, de *teorias*. Os seguintes axiomas devem ser satisfeitos: (1) F pertence a T, ou seja, o conjunto das fórmulas é uma teoria; (2) se T_1, T_2, ... são teorias (o conjunto pode ser qualquer, não necessariamente enumerável, ou seja, não precisa admitir uma correspondência um a um com o conjunto dos números naturais), então a sua interseção, que consta daquelas fórmulas que pertencem a todas essas teorias, também é uma teoria. Isso pode parecer difícil, mas não é; tudo o que se pede é concentração e capacidade de raciocínio abstrato. Vamos em frente.

Dado um conjunto de fórmulas Γ e uma fórmula A, escrevemos $\Gamma \vdash A$ para indicar que toda teoria que contenha as fórmulas de Γ contém A. Neste caso, dizemos que A é *dedutível*, ou que é *consequência sintática*, das fórmulas de Γ. As fórmulas de Γ denominam-se de *premissas* da dedução e A é a *conclusão*. Escrevemos $\Gamma \nvdash A$ em caso contrário. É simples mostrar que o operador $\vdash$, que chamamos de *operador de dedução*, tem as seguintes propriedades: (a) $\{A\} \vdash A$ (autodedutibilidade), (b) se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash A$, sendo Δ um conjunto qualquer de fórmulas (monotonicidade), e (c) se $\Gamma \vdash A$ e se $\Delta \vdash B$ para toda B em Γ, então $\Delta \vdash A$ (lei do corte). A autodedutibilidade é óbvia: toda fórmula é dedutível dela mesma (ou de seu conjunto unitário). A monotonicidade significa que se deduzimos A de Γ, continuaremos deduzindo A não importa quantas premissas adicionemos às que já tínhamos. A lei (ou regra) do corte também é bastante intuitiva. Repare que na maioria dos 'raciocínios' que fazemos, ferimos a monotonicidade. Por exemplo, se sempre que uma criança houve seu pai buzinar, sabe que precisa ir correndo abrir o portão da garage para ele entrar, não implica que hoje, ouvindo a buzina, deva fazer isso, pois sabe uma coisa a mais, a saber, que seu pai não esqueceu o controle do portão. Uma premissa a mais *derrota* (*defeat*) a derivação. Tais formas de inferência são extremamente importantes, mas não trataremos delas aqui.

A partir dessas definições, podemos introduzir todo o aparato sintático usual, bem como provar seus resultados correspondentes, mas também não é disso que queremos falar. Um outro conceito importante é o de *consequência lógica*; sendo Γ um conjunto de fórmulas, escrevemos $Cn(\Gamma)$ para representar o conjunto de todas as fórmulas de F que são dedutíveis das fórmulas de Γ. Em outras palavras, A estará em toda teoria que contenha as fórmulas de Γ, e somente nessas teorias. Se dispusermos do símbolo de dedução, podemos definir $Cn(\Gamma) = \{A : \Gamma \vdash A\}$. O operador Cn é chamado de *operador de consequência de Tarski*. É imediato provar que ele satisfaz as seguintes condições: (i) Γ está contido em $Cn(\Gamma)$; (ii) se Γ está contido em Δ, então $Cn(\Gamma)$ está contido em $Cn(\Delta)$, e (iii) $Cn(Cn(\Gamma))$ está contido em $Cn(\Gamma)$, ou seja, aquilo que se deduz do que já foi deduzido, pode ser obtido apenas das premissas originais.

Vamos ver algumas formas alternativas de dizer a mesma coisa, talvez mais intuitivas à maioria dos leitores.

A primeira inverte a situação acima. Dizemos que uma lógica é um par $L = \langle F, \vdash \rangle$

composto por um conjunto F como acima e por uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas, satisfazendo a autodedutibilidade, a monotonicidade e a lei do corte. Com isso, podemos agora definir *teoria*; uma teoria é um conjunto de fórmulas fechado por deduções, ou seja, é um conjunto T tal que tudo o que for deduzido de fórmulas de T ainda pertence a T. Podemos agora mostrar que as condições (1) e (2) impostas acima podem ser obtidas como teoremas. As duas abordagens são equivalentes. Mas há uma terceira que vale a pena mencionar. Pomos agora que uma lógica é um par $L = \langle F, Cn \rangle$, sendo F como acima e Cn uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas, satisfazendo (i)-(iii) acima. Podemos agora definir $\vdash$ a partir de Cn do seguinte modo: $\Gamma \vdash A$ se e somente se A pertence a $Cn(\Gamma)$ e provar que valem (a)-(c) acima. A partir disso, voltamos a definir teoria e provar que as condições (1) e (2) são satisfeitas. Isso mostra que as três formas de abordagem são equivalentes. Uma quarta, também equivalente às anteriores é a seguinte. Dizemos que uma lógica é uma tripla ordenada $L = \langle F, A, R \rangle$, onde F é como antes, *A* é um subconjunto de F, dito conjunto dos *axiomas* de L e *R* é uma coleção de relações entre conjuntos de fórmulas (as premissas da regra) e fórmulas, ditas *regras de inferência* de L. Suporemos que as regras são *finitárias*, ou seja, há sempre um número finito de premissas, mas isso poderia ser generalizado. Se $A_1, A_2, ..., A_n$ forem as premissas de uma regra R e A for a conclusão, diremos que A é *consequência imediata* das A_j pela regra R.

Agora podemos introduzir a noção de dedução, $\Gamma \vdash A$, do seguinte modo. Dizemos que A é dedutível de Γ se existe uma sequência (no nosso caso, finita, mas isso pode ser estendido para casos mais gerais) de fórmulas $B_1, B_2, ..., B_n$ tal que (I) B_n é A; (II) cada B_j, para $j<n$, é um axioma (elemento de *A*), ou pertence a Γ, ou é consequência imediata de fórmulas precedentes da sequência por uma das regras de inferência. Claro que (a)-(c) acima valem e que podemos definir facilmente $Cn(\Gamma)$ para qualquer Γ, de forma a valerem (i)-(iii). Teorias também podem ser definidas sem dificuldade (o leitor deveria tentar), de modo a cumprir (1) e (2).

Vamos ver um exemplo simples de uma lógica. Tomemos $F = \{0,1,2,3,4,...\}$ (o conjunto dos números naturais) e seja $A=\{0,2,4,6,8,...\}$ (o conjunto dos números pares). As regras são duas, definidas fazendo-se uso das operações conhecidas com números: (R_1) de A e B, inferimos A+B e (R_2) de A e B, inferirmos A.B. É imediato constatar que $\{1,2\} \vdash 1$, $\{1,3\} \vdash 4$, $\{2,3\} \vdash 6$, bem como que $Cn(A) = A \neq F$, etc.

Esta lógica, apesar de interessante para exercícios, não tem muita utilidade. Uma mais poderosa é obtida acrescentando-se à estrutura $L = \langle F,T \rangle$ um operador binário definido sobre F, denotado $\rightarrow$. Escreveremos $A \rightarrow B$ para indicar que A e B estão relacionados por $\rightarrow$. Pomos agora a seguinte definição: L é uma *lógica implicativa intuicionista* se forem satisfeitas as seguintes condições, para toda teoria T de L, e todas A, B, C em T: (I_1) $A\rightarrow(B \rightarrow A)$ pertence a T; (I_2) $(A\rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ pertence a T, e (I_3) se A e se $A\rightarrow B$ pertencem a T, então B pertence a T. (Quadro 4) Obtém-se uma *lógica implicativa clássica* se a essas condições impusermos uma a mais, conhecida como Lei de Peirce: (P) $((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A$ pertence a T. O caminho está traçado. Acrescentando-se à estrutura $L = \langle F,T\rangle$ outros operadores, como $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção) e $\neg$ (negação) obedecendo axiomas pertinentes, obtemos as lógicas *conjuntiva, disjuntiva, da negação* (minimal, por exemplo) ou então, colocando-se esses conectivos todos, obtendo $L= \langle F,T,\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\rangle$ com axiomas adequados, obtemos as lógicas usuais *positiva intuicionista, positiva clássica* (essas duas sem o operador unário de negação)*, de Johansson-Kolmorov, de Brouwer-Heyting,* e a *clássica.* Claro que podemos estender essas estruturas para obter as correspondentes lógicas quantificacionais (isso daria um pouco mais de trabalho, e não dispomos deste espaço aqui). Operadores convenientes como $\Diamond$ (possibilidade), ∂ (obrigatoriedade), o (bom comportamento) nos permite obter com facilidade os sistemas modais, deônticos e muitos cálculos paraconsistentes, seja de nível proposicional ou quantificacional. Adicionando-se um operador binário $\in$ (pertinência), podemos obter as teorias de conjuntos usuais, como o sistema Zermelo-Fraenkel. As propriedades sintáticas e semânticas de todos esses sistemas podem ser estudadas como se faz usualmente. Saliente-se que mesmo *lógicas indutivas* podem ser estudadas via esta abordagem.

Como se vê, não se pode antecipar uma definição de lógica sem que se conheça a fundo os sistemas que são trabalhados pelos lógicos. Assim, ao se dizer que a lógica trata de raciocínios, do que se está falando? Um brouweriano não aceitaria uma redução ao absurdo, como faz um 'clássico'. Um lógico paraconsistente não vê problema em derrogar o "mais certo de todos os princípios", como se referiu Aristóteles ao princípio da contradição, e assim por diante. Da mesma forma, a lógica (qual lógica?) não pode ser vista como algo *a priori*. Temos mais familiaridade com a lógica (dita) clássica por questões culturais, mas nada impede que, em princípio, nossas categorias do entendimento nos tivessem levado a uma lógica distinta da clássica.

Ademais, o que é a lógica *clássica*? Para alguns, como Quine, ela deve se restringir à logica quantificacional elementar (de primeira ordem), mas porque isso tem que ser assim? Vimos acima que, procedento adequadamente, podemos obter sistemas tão fortes como as teorias de conjuntos. Qual o critério para excluí-las daquilo que denominamos 'lógica', relegando-as a serem 'matemática', como apregoava Quine?

Qualquer resposta não passará de mero palpite, opinião. Lógica é aquilo que faz parte da atividade do lógico, e como se constata verificando-se a *Mathematical Subject Classification*, este campo do conhecimento, como qualquer outro, está em constante alteração (itens entram e saem dessa classificação quando ela é reavaliada, a cada 10 anos), o que atesta ser uma área viva e saudável de nossa atividade científica.

Quadro 1

Os três mais célebres princípios da lógica tradicional (mas não os únicos) admitem cada um uma variedade de formulações não equivalentes. Por exemplo, o princípio da identidade pode ser $A \rightarrow A$ (lógica proposisional), ou $\forall x(x=x)$ (lógica de primeira ordem), "todo objeto é idêntico a si mesmo"(formulação semântica). Versões do princípio da contradição são: $\neg(A \wedge \neg A)$, "dentre duas proposições contraditórias (uma sendo a negação da outra), uma delas é falsa". Quanto ao terceiro excluído, temos $A \wedge \neg A$, e "dentre duas proposições contraditórias (uma sendo a negação da outra), uma delas é verdadeira". Outros princípio são: a dupla negação (clássica) diz que $\neg\neg A \leftrightarrow A$, a redução ao absurdo clássico é $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A))$, e assim por diante.

Quadro 2

No site da Mathematics Subject Classification http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html, o leitor encontrará as subdivisões datadas de 2010 da matemática presente. A seção 03 intitula-se Mathematical Logic and Foundations, e engloba, dentre várias outras, a teoria dos modelos, a teoria da prova, a teoria dos conjuntos, a teoria da computabilidade, a lógica algébrica. Como dizer que a lógica ocupa-se meramente do estudo de raciocínios válidos?

Quadro 3

Lógicas que derrogam o principio da identidade (em alguma de suas formas) ou que restringem o conceito de identidade da lógica clássica são denominadas de não-reflexivas. Por exemplo, as *lógica da implicação causal*, que interpretam $A \rightarrow B$ como "A *causa* B", em geral não aceitam que uma coisa possa ser a causa dela mesma. O princípio $\forall x(x=x)$ é enfraquecido nas *Lógicas de Schrödinger* e nas teorias de *quase-conjuntos*, que operam sobre domínios nos quais se admite que a relação de identidade não de aplica para determinados objetos. As lógicas que derrogam o princípio do terceiro excluído são chamadas de *paracompletas*, estando entre elas a lógica intuicionista e as lógicas polivalentes.

Quadro 4

Um exemplo de uma derivação na lógica positiva intuicionista. Provaremos que A→A é uma tese desta lógica, em estrita conformidade com a definição de dedução dada no texto (neste caso, não há premissas além dos axiomas da lógica em questão). Temos a seguinte derivação, na qual indicamos à direita o que se passa com cada fórmula da sequência:

1. $A\to(A\to A)$	instancia do axioma I1
2. $(A\to(A\to A))\to(A\to((A\to A)\to A)\to(A\to A))$	axioma I2
3. $(A\to((A\to A)\to A))\to(A\to A)$	1,2, axioma I3
4. $A\to((A\to A)\to A)$	axioma I1
5. $A\to A$	3,4, axioma I3

Referências

Da Costa, N. C. A. [1980], *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. São Paulo, Hucitec-EdUSP.

Newton C. A. da Costa

Aposentado dos departamentos de matemática e de filosofia da USP, é um dos criadores das lógicas paraconsistentes e tem dado colaboração em diversas áreas do conhecimento, tendo sido agraciado e reconhecido no Brasil e no exterior. Atualmente é professor do programa de pós-graduação do departamento de filosofia da UFSC. É pesquisador do CNPq.

Décio Krause

Aposentado do departamento de matemática da UFPR, é atualmente professor do departamento de filosofia da UFSC. É pesquisador do CNPq.